БИЛЕТ 1

ТХОР С.

Основные понятия об ОДУ и системах ОДУ. Опис. мат. моделей движ. точки и моделей динамич. популяций.

Опр 1 Диф. ур. – ур-ие содержащее пр-ные некой ф-ии.

Опр 2 ОДУ ур – ур-ие содержащее пр-ые ф-ии <u>только по одной перемен</u> незовис.

Опр 3 ДУ в частных производных – ур-ие содерж. пр-ые неизвес. ф-ии по неск. незовис. перем.

Опр 4 Порядок ОДУ – наиб. порядок вх-их в него произв.

Опр 5 ОДУ 1-го пор – $F(t, y(t), y'(t)) = 0$, $t \in [a, b]$.

Опр 6 ОДУ n-го пор – $F(t, y(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$, $t \in [a, b]$.

Опр 7 ОДУ n-го пор. разреш. отн. старш. произв. – $y^{(n)}(t) = F(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$, $t \in$

Опр 8 $] \exists$ $f_i = (t, y_1, \dots, y_n)$, $i = \overline{1,n}$. Норм. сист. ОДУ относ. неизв. ф-ии наз.:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(t, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ y_n' = f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad t \in [a, b] \qquad (1.2)$$

Утв 1 Ур-ие (1.1) $y^{(n)}(t) = F(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ может быть сведено к (1.2).

▷ $]$ $y(t)$ – реш (1.1). Введем ф-ии: $y_1(t) = y(t)$, $y_2(t) = y'(t), \dots, y_n(t) = y^{(n-1)}(t)$

Тогда
$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y_3(t) \\ y_{n-1}'(t) = y_n(t) \\ y_n'(t) = F(t, y(t), \dots, y_n(t)) \end{cases} \quad t \in [a, b]. \qquad (1.3)$$ ◼

Утв 2 Ур-ие (1.2) может быть сведено к (1.1).

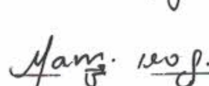
▷ Если $y_1(t), \dots, y_n(t)$ – реш. (1.3), то $y(t) = y_1(t)$ – реш (1.1). ◼

Опр 9 Ф-ия $y(t)$, $t \in [a, b]$ наз. решением ОДУ $F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, если:

1) $y(t) \in C^n[t_1, t_n]$

2) Подстан. $y(t)$ в $F(t, y(t), \dots, y^{(n)})$ превр. его в <u>тождество</u>.

<u>Мат. мод. движ. точки:</u>



$\triangleleft$ м. с <u>единич</u> массой, $f(t)$ – действ. сила, $x(t)$ – положс. т.

По з. Н. $a(t) = f(t) \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = f(t)$ – ОДУ 2-го порядка

$x(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{\tau_0}^{\tau} f(\theta)\, d\theta\, d\tau + C_1 + C_2 t$. При $C_1 = x_0$, $C_2 = v_0$ можно будет однозначно опр-ть положс. точки.

Если f зависит от $x(t)$ и $x'(t)=v(t)$, то

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x(t), x'(t)).$$

$\triangleleft$ движ. мат. т. ед. массы в 2D пр-ве:

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$.

$\vec{f}(t, \vec{r}(t), \vec{r}'(t)) = (f_1(t, \vec{r}(t), \vec{r}'(t)), f_2(t, \vec{r}(t), \vec{r}'(t)))$.

$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = f(t, \vec{r}(t), \vec{r}'(t))$. Запишем покомпонентно

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = f_1(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)) \\ \frac{d^2y}{dt^2} = f_2(t, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = f_3(t, \end{cases}$$ — не норм. сист. ОДУ.

Однако если $u=x'$, $v=y'$, $w=z'$ в $f(t, x, y, z, u, v, w)$ то

$$\begin{cases} x' = u \\ y' = v \\ z' = w \\ u' = f_1(t, x, y, z, u, v, w) \\ v' = f_2(t, x, y, z, u, v, w) \\ w' = f_3(t, x, y, z, u, v, w) \end{cases}$$ — норм. сист. ОДУ.

<u>Мат. модель динамики популяций.</u>

$\triangleleft$ модель изм. численности биолог. объектов.

2-х видов жертв и хищников.

] $u(t)$ — кол-во жертв, $v(t)$ — хищников.

] $u(t)$ и $v(t)$ — непр. диф.] скорость рожд. жертв ~ их кол-ву, а скор. рожд хищников ~ (кол-во хищ · кол-во жертв).

$u'(t) = au(t) - bu(t)v(t)$ — скр-ть смертности.

$v'(t) = cu(t)v(t) - dv(t)$.

Получ. норм. сист. ОДУ, для однозн. реш нужно задать $t_0, u(t_0), v(t_0)$

БИЛЕТ 2

ОДУ в симм. виде. Общ. интеграл. Ур-е в полн. дифф. (УПД) Теор. об общем инт. УПД. Теор. о необх. и дост. усл-ии УПД.

Опр 10 ОДУ в симм. виде наз. ур-ие:

(1.11) $M(t,y)dt + N(t,y)dy = 0$, где $M, N \subset C(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и

$|M(t,y)| + |N(t,y)| > 0$, $\forall (t,y) \in D$.

Опр 11 Пара ф-ий $t = \varphi(\sigma)$, $y = \psi(\sigma)$ наз. параметр. реш. ОДУ в сим. виде на $[\sigma_1, \sigma_2]$ если:

1) $\varphi(\sigma), \psi(\sigma) \in C^1[\sigma_1, \sigma_2]$
2) $|\varphi'(\sigma)| + |\psi'(\sigma)| > 0$ $\qquad \forall \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$
3) $(\varphi, \psi) \in D$
4) При подстановке $t = \varphi(\sigma)$, $y = \psi(\sigma)$ в (1.11) получ. тождество.

$$M(\varphi, \psi)\varphi'(\sigma) + N(\varphi, \psi)\psi'(t) \equiv 0.$$

Опр 12 Интеграл ур-я в сим. виде – $\Phi(t,y,c) = 0$, $c \in C_0 \in \mathbb{R}$.
Если $\forall c \in C_0$ оно опр-т реш. ур-ия (1.11).

Опр 13 Если инт. задает все реш. ОДУ в симм. виде, то он наз. общ. интегр..

Опр 14 Ур-ие в сим. виде наз. УПД в обл. D, если $\exists V \in C^1(D)$
$V(t,y)$: $|V'_t| + |V'_y| > 0$ и $M(t,y) = V'_t$, $N(t,y) = V'_y$ $\forall (t,y) \in D$
$dV(x,y) = V'_x dx + V'_y dy = 0$.

Теорема 1 УПД вида (1.11) имеет в обл-ти D общий интегр. вида:
$$V(t,y) = C.$$

Идея: $Mdt + Ndy = 0$ – УПД $\Rightarrow V'_t dt + V'_y dy = 0 \Leftrightarrow dV = 0 \Leftrightarrow V = const$.

1) Пр-м, что $V(t,y) = C$ – инт. ◁ V в окр-ти $\forall (t_0, y_0) \in D$ и $C_0 = V(t_0, y_0)$, тогда из опр 10 и опр 14:

$$\text{либо } V'_t = M(t_0, y_0) \neq 0, \text{ либо } V'_y(t_0, y_0) = N(t_0, y_0) \neq 0.$$

] 2-е справ-во $\Rightarrow$ по теор. о неявно зад. ф-ии в окр-ти t_0 $\exists$ непр. дифф. ф-ия $y = g(t)$: $y_0 = g(t_0)$ и $V(t, g(t)) = C_0$.

$$dC_0 = 0 = dV(t, g(t)) = V'_t(t,y)dt + V'_y(t, g(t))\, dg(t) =$$
$$= M(t, g(t))dt + N(t, g(t))g'(t)dt.$$

то есть $t = t$ и $y = g(t)$ – парам. реш. ур-ия (1.11) $\Rightarrow$
$\Rightarrow V(t,y) = C$ – интегр. ур-я (1.11) (ОДУ в сим. виде).

2) Д-м, что $V(t,y)=C$ – общий интегр. (1.11)

$\rfloor$ $t=\varphi(\sigma)$, $y=\psi(\sigma)$, $\sigma\in[\sigma_1,\sigma_2]$ – произв. реш. (1.11) такое, что $(\varphi(\sigma),\psi(\sigma))\in D$ при $\sigma\in[\sigma_1,\sigma_2]$.

Из опр. 14 для $\forall\sigma\in[\sigma_1,\sigma_2]$:

$$V'_\sigma(\varphi(\sigma),\psi(\sigma)) = M(\varphi(\sigma),\psi(\sigma))\varphi'(\sigma)+N(\varphi(\sigma),\psi(\sigma))\psi'(\sigma).$$

Т.к. φ и ψ - пар. реш, то из опр. 11 $V'_\sigma(\varphi,\psi)\equiv 0$, $\forall\sigma\in[\sigma_1,\sigma_2]$.

$\Rightarrow V(\varphi,\psi)=c$, $\forall\sigma\in[\sigma_1,\sigma_2]$ $\Rightarrow$ V - общ. инт. (1.11). ∎

Теорема 2. Критерий УПД.

$\rfloor$ $M(t,y)$, $N(t,y)\in C^1(D)$, $D=\{|t-t_0|<A, |y-y_0|<B\}$ (стороны парал. осям коорд.).

и $|M(t,y)|+|N(t,y)|>0$. Тогда $M(t,y)dt+N(t,y)dy=0$ – УПД $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $M'_y(t,y)=N'_t(t,y)$, $\forall(t,y)\in D$.

▶ $\boxed{\Rightarrow}$ $\rfloor$ (1.11) $Mdt+Ndy=0$ – УПД $\Rightarrow\exists V(t,y)$:

$M(t,y)=V'_t(t,y)$, $N(t,y)=V'_y(t,y)$, $\forall(t,y)\in D$

$M'_y=V''_{ty}$, $N'_t=V''_{yt}$ $\Rightarrow$ $M'_y=N'_t$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\rfloor$ $M'_y=N'_t$.

$\sphericalangle$ $V(t,y)=\int_{t_0}^{t}M(\xi,y)d\xi+\int_{y_0}^{y}N(t_0,\eta)d\eta$, (t_0,y_0) – фикс. т. $\in D$.

(Ф-ла Лейбница) $V'_t=M(t,y)$, $V'_y=\int_{t_0}^{t}M'_y(\xi,y)d\xi+N(t_0,y)y'_y=\int_{t_0}^{t}N'_t(\xi,y)d\xi+$

$+N(t_0,y)=N(t,y)$ $\Rightarrow$ УПД ∎

БИЛЕТ 3

Задача Коши для ОДУ 1-го порядка, разреш. отн. произв. Лемма Гронуолла – Беллмана. Теор о ед. реш. ЗК.

Опр 15 ЗК для ОДУ 1-го пор., разр. отн. произв. $y' = f(t, y)$ наз:

$$\begin{cases} y'_t = f(t,y) & (2.1) \\ y(t_0) = y_0 & (2.2) \end{cases} \quad (t,y) \in \Pi = \{ |t-t_0| \le T,\ |y-y_0| \le A \}. \quad t_0, y_0, T, A - const.$$

Опр 16 Ф-ия $\bar{y}(t)$ наз. решением ЗК (2.1) и (2.2) на $[t_1, t_2]$, если: $\bar{y}(t) \in C^1[t_1,t_2]$, $|\bar{y}(t) - y_0| \le A$ для $[t_1, t_2]$, $\bar{y}(t)$ удовл. (2.1) на $[t_1, t_2]$ и (2.2).

Опр 17 Ф-ия $f(z)$ удовл. усл. Липшица на $[a,b]$, если $\exists L - const > 0$:

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le L |z_1 - z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in [a,b].$$

Св-ва:

1) Липш. $\Rightarrow$ непр. ▶ $z_1 \to z_2 \Rightarrow f(z_1) \to f(z_2)$ ■

2) Если $\exists f'(z)$ $\forall z \in [a,b]$ и $\max(f'(z)) \le M = const$ на $[a,b]$ то $f(z)$ - Липш.

▶ $f(z_1) - f(z_2) = f'(\xi)(z_1 - z_2)$, $L = M$ ■

3) $|x|$ не дифф, но липш. на $[-1, 1]$.

▶ $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 - z_2|$, $L = 1$ ■

4) $z^{2/3}$ - непр, но не Липш. на $[-1,1]$.

▶ $\exists L > 0 : |f(z_1) - f(z_2)| \le L|z_1 - z_2| \ \forall z_1, z_2 \in [-1, 1]$.

Пусть $z_2 = 0$, $z_1 \in (0, \frac{1}{L^3})$, Пусть $z_1 = \frac{1}{8L^3} \Rightarrow \sqrt[3]{\left(\frac{1}{8L^3}\right)^2} \le L \frac{1}{8L^3} \Leftrightarrow \frac{1}{4L^2} \le \frac{1}{8L^2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{8}$ (!?) ■

5) Пусть $f(z)$ - липш. на $[a, +\infty) \Rightarrow \exists C > 0 : |f(z)| \le Cz$.

▶ Пусть $z_2 = a$, $z_1 \ge 1$ $\quad |f(z_1) - f(a)| \le L(z_1 - a) = Lz_1 - La$.

Если f - огр., то $|f(z_1) - f(a)|$ - огр, а z_1 - неогр. $\Rightarrow$ при $z_1 \ge 1$ нер-во вып $\Rightarrow |f(z_1)| \le C_1 |f(z_1) - f(a)| \le Lc_1 z_1 + Lc_1 a_1 \le$ $\le C_2 z_1$.

Если f - неогр., то при $z_1 \ge 1$ $|f(z_1)| > f(a) \Rightarrow |f(z_1)| \le Lz_1 + f(a) - La \le$ $\le C_3 z_1$. ■

Лемма 1 Гронуолла – Беллмана

Пусть $z(t) \in C[t_1, t_2]$ и выполнено:

$$0 \le z(t) \le c + b \left| \int_{t_0}^{t} z(\tau) d\tau \right|, \text{ где } c \ge 0 \text{ и } b > 0 - const$$
$t, t_0 \in [t_1, t_2]$.

Тогда $z(t) \le c \cdot \exp(b|t - t_0|)$.

▶ 1) $\forall t \geq t_0$. Введем ф-ию $p(t) = \int_{t_0}^{t} z(\sigma)d\sigma$, $t \in [t_0, t_2]$

Тогда $p'(t) = z(t) \geq 0$, $p(t_0) = 0$. Из усл-ия $\Rightarrow$ $p'(t) \leq c + \beta p(t)$, $t \in [t_0, t_2]$.

Домножим; $p'(t)\cdot \exp(-\beta(t-t_0)) \leq c\cdot\exp(-\beta(t-t_0)) + \beta p(t)\exp(-\beta(t-t_0))$, $t \in [t_0, t_2]$

$$\Leftrightarrow \quad \left(p(t)\exp(-\beta(t-t_0))\right)'_t \leq c\exp(-\beta(t-t_0))$$

Проинтегр-в от t_0 до t по dt:

$$p(t)\cdot\exp(-\beta(t-t_0)) - p(t_0) \leq c\int_{t_0}^{t}\exp(-\beta(\sigma-t_0))d\sigma = \frac{c}{\beta}\left(1-e^{-\beta(t-t_0)}\right)$$

Т.к. $p(t_0) = 0 \Rightarrow \beta p(t) \leq c\exp(\beta(t-t_0)) - c \Rightarrow$

$$z(t) \leq c + \beta p(t) \leq c - c + c\cdot\exp(\beta(t-t_0)),\ t \in [t_0, \beta]$$

2) $t \leq t_0$ $\exists\, p(t) = -\int_{t_0}^{t} z(\sigma)d\sigma$, $t \in [t_1, t_0]$.

$\Rightarrow z(t) = -p'(t) \Rightarrow -p'(t) \leq c + p\beta p(t)$

$$z(t) \leq c + \beta p(t) \leq c - c + c\cdot\exp(\beta(t_0 - t)) = c\exp(\beta(t-t_0)),\ t \in [t_1, t_0]$$ ■

Теорема 3. О единств. реш. ЗК для ОДУ 1-го порядка разреш. отн. производной.

$\exists$ в опр. ЗК: $\begin{cases} y'_t = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ $(t,y) \in \Pi = \{|t-t_0| \leq T, |y-y_0| \leq A\}$

$f(t,y) \in C(\Pi)$ и удовл. усл. Липшица по y с конст. $L > 0$. Тогда если $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – реш. на $\{|t-t_0| \leq T\}$, то $y_1(t) \equiv y_2(t)$ на $\{|t-t_0| \leq T\}$.

▶ **Лемма 2. О редукции к инт. ур-ю.**

$\exists\, f(t,y) \in C(\Pi)$, $\bar{y} \in C[t_0-T, t_0+T]$, $|\bar{y}(t) - y_0| \leq A$, $\forall t \in [t_0-T, t_0+T]$.
Тогда $\bar{y}(t)$ – реш. ЗК $\Leftrightarrow$ $\bar{y}(t)$ – реш $\bar{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\sigma, \bar{y}(\sigma))d\sigma$.

▶ $\boxed{\Rightarrow}$ $y(t)$ – реш ЗК $\Rightarrow$ по опр. 16 $\bar{y}(t) \in C[t_0-T, t_0+T]$, $|\bar{y}(t) - y_0| \leq A$, $\forall t \in [t_0-T; t_0+T] \Rightarrow$ можно пр-ть ур-ие $\bar{y}'(t) = f(t, \bar{y}(t))$:

$$\int_{t_0}^{t}\bar{y}'(\sigma)d\sigma = \int_{t_0}^{t} f(\sigma, \bar{y}(\sigma))d\sigma,\ t \in [t_0-T; t_0+T].$$

Т.к. $y(t_0) = y_0 \Rightarrow \bar{y}(t) - y_0 = \int_{t_0}^{t} f(\sigma, \bar{y}(\sigma))d\sigma$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\exists\, \bar{y}(t)$: $\bar{y}(t) \in C[t_0-T, t_0+T]$, $|\bar{y}(t) - y_0| \leq A$ для $t \in [t_0-T, t_0+T]$
и $\bar{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\sigma, \bar{y}(\sigma))d\sigma$. При $t = t_0$ получим $y(t_0) = y_0$. Т.к. $\bar{y}(t) \in C[t_0-T, t_0+T]$
$\Rightarrow f(t, \bar{y}(t))$ – непр-на $\Rightarrow \int_{t_0}^{t} f(\sigma, \bar{y}(\sigma))d\sigma \in C^1[t_0-T, t_0+T]$. $\Rightarrow \bar{y}(t) \in C^1[t_0-T, t_0+T]$.
$y'(t) = f(t,y)$ ■

Т.к. y_1 и y_2 – реш. ЗК $\Rightarrow$ $y_{1/2} = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\sigma, y_{1/2}(\sigma))d\sigma$, $t \in [t-T, t+T]$

$$|y_1(t) - y_2(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} f(\sigma, y_1(\sigma))d\sigma - \int_{t_0}^{t} f(\sigma, y_2(\sigma))d\sigma\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t}|f(\sigma, y_1(\sigma)) - f(\sigma, y_2(\sigma))|d\sigma\right| \leq L\left|\int_{t_0}^{t}|y_1(\sigma) - y_2(\sigma)|d\sigma\right|$$

$\exists\, z(t) = |y_1(t) - y_2(t)|$. $c = 0$, $\beta = L$ применим лемму Гронуолла-Беллмана:

$$|y_1(t) - y_2(t)| = z(t) \leq 0\cdot e^{(L|t-t_0|)} = 0 \Rightarrow y_1(t) = y_2(t)$$ ■

БИЛЕТ 4

Теорема о $\exists$ реш ЗК для ОДУ 1-го порядка, разреш. отн. произв.

Теорема 4. Локальная теор. $\exists$ реш. ЗК.

Пусть в опр ЗК $f(t,y) \in C(\Pi)$ и удовл-т усл-ю Липшица по y и $|f(t,y)| \le M$ $(t,y) \in \Pi$. Тогда на $[t_0-h, t_0+h]$, где $h = \min\{T, \frac{A}{M}\}$ (A из опр. Π) $\exists$ ф-ия $y(t)$ такая: $y(t) \in C^1[t_0-h, t_0+h]$, $[y(t)-y_0] \le A$ для $t \in [t_0-h, t_0+h]$, $y'(t) = f(t,y)$ и $y(t_0) = y_0$.

▶ Идея: Рассм. посл. $y_0(t) = y_0$, $y_k(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\sigma, y_{k-1}(\sigma))\,d\sigma$, $k \in \mathbb{N}$ и покажем, что посл. равн. сх-ся к $y(t)$ – реш. ЗК.

1) Покажем, что $|y_k(t) - y_0| \le A$ $\forall |t-t_0| \le h$ и $y_k(t) \in C[t_0-T, t_0+T]$, $k = \overline{0 \ldots}$

По индукции: а) $|y_0 - y_0| \le A$, $y_0 \in C[t_0-h, t_0+h]$.

б) Пусть верно для $y_k(t) \Rightarrow |y_{k+1} - y_0| = \left|\int_{t_0}^t f(\sigma, y(\sigma))\,d\sigma\right| \le \left|\int_{t_0}^t |f(\sigma, y(\sigma))|\,d\sigma\right| \le$
$\le \left|\int_{t_0}^t M\,d\sigma\right| = M|t-t_0| \le Mh \le A$ $t \in [t_0-h, t_0+h]$.

$y_k(t) \in C[t_0-h, t_0+h] \Rightarrow f(t, y_k(t)) \in C[t_0-h, t_0+h]$.

$|y_k - y_0| \le A \Rightarrow y_{k+1} = y_0 + \int_{t_0}^t f(\sigma, y(\sigma))\,d\sigma \in C[t_0-h, t_0+h]$.

2) По м. индукции д-м, что при $t \in [t_0-h, t_0+h]$

$$|y_{k+1}(t) - y_k(t)| \le AL^k \frac{|t-t_0|^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

а) $k=0$: $|y_1(t) - y_0(t)| = \left|y_0 + \int_{t_0}^t f(\sigma, y_0)\,d\sigma - y_0\right| \le \left|\int_{t_0}^t f(\sigma, y_0)\,d\sigma\right| \le Mh \le A$

б) Пусть верно для $k = m-1 \Rightarrow$

$$|y_{m+1}(t) - y_m(t)| = \left|y_0 + \int_{t_0}^t f(\sigma, y_m(\sigma))\,d\sigma - y_0 - \int_{t_0}^t f(\sigma, y_{m-1}(\sigma))\,d\sigma\right| \le$$

$$\le \left|\int_{t_0}^t |f(\sigma, y_m(\sigma)) - f(\sigma, y_{m-1}(\sigma))|\,d\sigma\right| \circledS, \quad t \in [t_0-h, t_0+h]$$

$$\circledS\ L\left|\int_{t_0}^t |y_m - y_{m-1}|\,d\sigma\right| \le L\left|\int_{t_0}^t AL^{m-1}\frac{|\sigma - t_0|^{m-1}}{(m-1)!}\,d\sigma\right| = AL^m \frac{|t-t_0|^m}{m!}$$

3) Рассм $\{y_k(t)\}_{k=0}^\infty$. Очев, что $y_k(t) = \sum_{m=1}^k (y_m - y_{m-1}) + y_0$, поэтому иссл-м $\{y_k\}$ на р/н сх-ть $\Leftrightarrow$ иссл-м на р/н сх-ть ряд $\sum_{m=1}^\infty (y_m - y_{m-1})$ на $[t_0-h, t_0+h]$. Этот ряд на $[t_0-h, t_0+h]$ мажс-ся числ. рядом $\sum_{m=1}^\infty AL^{m-1}\frac{h^{m-1}}{(m-1)!}$, который сх-ся по Даламберу $\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{Lh}{m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Таким образом т.к. $\{y_k(t)\}_{k=0}^\infty \to y(t)$ на $[t_0-h, t_0+h] \Rightarrow \{y_k(t)\}_{k=0}^\infty \underset{[t_0-h, t_0+h]}{\rightrightarrows} y(t) \Rightarrow y(t) \in C[t_0-h, t_0+h]$

Переходя к пределу в $[y_k(t) - y_0] \le A$ получим $[y(t) - y_0] \le A$ $\forall t \in [t_0-h, t_0+h]$.

Для $\rightrightarrows$ посл. можно переходить к пределу под знаком интегр и знаком непр ф-ии. Тогда переходя к пределу в $y_k(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\sigma, y_{k-1}(\sigma))\,d\sigma$

$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\sigma, y(\sigma))\,d\sigma \Rightarrow$ по лемме Гронуолла_Беллмана: $y(t)$ – реш ЗК на $[t_0-h, t_0+h]$ ■

БИЛЕТ 5

ОДУ 1-го порядка не разр-ое отн. произв. Теор. о $\exists!$ реш. ЗК. Особ. реш. ур-е 1-го порядка, примеры.

Опр 18 ОДУ 1-го пор. не разр. отн. произв.: нельзя представить $y' = f(t, y(t))$.

Опр 19 ЗК для ОДУ не разреш. отн. произв.:

$$(1)\ \begin{cases} f(t, y, y') = 0 \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = p_0 \end{cases} \qquad f(t, y, p) \in C(D),\ D = \{|t - t_0| \le T,\ |y - y_0| \le A,\ |p - p_0| \le B\}$$

Замечание в ЗК для $y' = f(t, y)$ нет смысла ставить усл. на $y'(t_0)$ т.к. задание $y_0 = y(t_0)$ однозначно задает $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$.

> **Теорема 5.** О $\exists!$ реш ЗК для ОДУ 1-го пор. не разреш. отн. произв.
>
> 1) $f(t_0, y_0, p_0) = 0$ 2) $f(t, y, p),\ f'_y(t, y, p),\ f'_p(t, y, p) \in C(D)$.
>
> 3) $f'_p(t_0, y_0, p_0) \ne 0$
>
> Тогда $\exists h > 0,\ h \le T$: ЗК (1) для ОДУ не раз. отн. произв. имеет ед. реш., опр на $[t_0 - h, t_0 + h]$.

▶ Идея в усл. теор. вып. все усл. теор. о неявн. зад. ф-ии $p = g(t, y)$ т.е. $\exists$ окр Ω точки (t_0, y_0, p_0), $\Omega \in D$: ур-е $f(t, y, p) = 0$ однозн-но разрешимо относ. p, причём $g(t, y)$ непр. при $(t, y, p) \in \Omega$.

Тогда можно $\prec$ $\begin{cases} y' = g(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ и доказ., что её реш $\exists!$ и яв. реш ЗК для ОДУ, не разр. отн. пр-ой.

$\prec$ в окр-ти $(t_0; y_0, y'_0)$ ур-ие: $f(t, y, p) = 0$.

Из усл-ий 1+3 и теор о неявной ф-ии $\Rightarrow$ $\exists$ Ω_0 т. $(t_0; y_0)$ в которой $\exists!$ непр-ая ф-ия $p = f(t, y)$ имеющая в Ω_0 непр. частн. пр-ую:

$$f'_y(t, y) = -\frac{f'_y(t, y, p)}{f'_p(t, y, p)} \in C(\Omega_0) \text{ и яв. реш. } f(t, y, p) = 0$$

$$p(t_0) = y'_0 = f(t_0, y_0)$$

В окр-ти Ω_0 $F(t, y, y') \Leftrightarrow y'(t) = f(t, y(t))$. ЗКприним. вид:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad \text{Усл-ие } y'(t_0) = y'_0 \text{ - выполнено в силу } y'_0 = f(t_0, y_0).$$

$\prec$ ЗК в $\Pi = \{(t, y) : |t - t_0| \le a_0,\ |y - y_0| \le b_0\}$, a_0, b_0 малы, чтобы $\Pi \subset \Omega_0$

Ф-ия $f(t, y) \in C(\Omega_0) \Rightarrow C(\Pi)$. Т.к. $f'_y(t, y) \in C(\Omega_0) \Rightarrow \in C(\Pi) \Rightarrow$ огр на Π

$\Rightarrow \exists L = \max\limits_{(t, y) \in \Pi} \left| \dfrac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right|$ $\forall (t, y) \in \Pi \Rightarrow$ вып все усл-ия Теор. 4 $\Rightarrow$

$\exists\ h > 0$: на $[t_0 - h, t_0 + h]$ $\exists!$ реш. ЗК $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \exists!$ реш (1) ■

Опр 20 Ф-ия $y=\varphi(t)$ наз. особ. реш. ур-ие $f(t,y,y')=0$ на $[t_1,t_2]$, если $\forall t\in[t_1,t_2]$ $\exists$ $y=\varphi_0(t)$ — ещё одно реш этого же ур-ие:

1) $\varphi(t_0)=\varphi_0(t_0)$, $\varphi'(t_0)=\varphi_0'(t_0)$

2) $\forall \delta>0$: $\varphi(t)\not\equiv\varphi_0(t)$ в $[t_0-\delta, t_0+\delta]$.

Опр 21 (альтерн.) Особ реш. — реш, график которого в каждой точке кас графика какого-либо др. реш. этого же ОДУ.

Пример: В ур-ие $y' = 3\sqrt[3]{y^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=(t+C)^3 \\ y=0\end{array}\right.$ → все реш. яв. частн. (графика котор. ни в одной точке не кас. график какого-либо др. реш. этого ОДУ)

В $\mathbb{R}^2$ $y=0$ яв. особ. реш., а частных нет.

Если ОДУ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=t+c \\ y=0\end{array}\right.$ , то все ео реш — частные.

БИЛЕТ 6

Норм. сист. ОДУ. Теор. о ед. реш ЗК для норм. сист. ОДУ n-го порядка.

Опр 22 Сист. ОДУ вида:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$ отн. искол. ф-ий $y_1(t), \dots, y_n(t)$

наз. нормальной сист. ОДУ.

Опр 23 $f(t, y_1, \dots, y_n)$ удовл. усл. Липшица по $y_1, \dots, y_n$ если $\exists L > 0$-const

$$|f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) - f(t, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)| \le L(|y_1 - \tilde{y}_1| + |y_2 - \tilde{y}_2| + \dots +$$

$$+ |y_n - \tilde{y}_n|) \quad \forall t \in [a, b], \ \forall (y_1, \dots, y_n), (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Опр 24 Задача Коши для норм. сист. ОДУ.

(2.34) $$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$ $f_i(t, y_1, \dots, y_n) \in C(D_n)$, $D_n = \{t \in [a, b], \ y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^n\}$

(2.35) $$\begin{cases} y_1(t_0) = y_{01} \\ \vdots \\ y_n(t_0) = y_{0n} \end{cases}$$ $t_0 \in [a, b]$

или $$\begin{cases} (y_1', \dots, y_n') = f(t, y_1, \dots, y_n) \\ (y_1(t_0), \dots, y_n(t_0)) = (y_{01}, \dots, y_{0n}). \end{cases}$$

Опр 25 Ф-ии $y_1(t), \dots, y_n(t)$ наз. реш. ЗК (2.34), (2.35) на $[a, b]$, если:

1) $y_i(t) \in C^1[a, b]$, $i = \overline{1, n}$;

2) $y_i'(t) = f_i(t, y_1(t), \dots, y_n(t))$, $t \in [a, b]$, $i = \overline{1, n}$;

3) $y_i(t_0) = y_{0i}$, $i = \overline{1, n}$.

Теорема 6. О ! реш. ЗК для норм сист. ОДУ.

Д & опр ЗК для норм. сист. ОДУ $f_i(t, y_1, \dots, y_n) \in C(D)$ и удовл. усл. Липшица по $y_1, \dots, y_n$ в D с конст L.

Тогда если $y_1(t), \dots, y_n(t)$ и $\tilde{y}_1(t), \dots, \tilde{y}_n(t)$ — реш ЗК (2.34), (2.35) на $[a, b]$ то $y_i(t) = \tilde{y}_i(t)$ для $t \in [a, b]$, $i = \overline{1, n}$.

▸ Т.к. $\bar{y}(t)$ — реш ЗК (2.34), (2.35) ($\bar{y}(t) = y_1(t), \dots, y_n(t)$), то

$y_i'(t) = f_i(t, \bar{y}(t))$ $t \in [a, b]$, $y_i(t_0) = y_{0i}$, $i = \overline{1, n}$.

Применяя лемму о редукции к каждому из ур-ий:

$$y_i(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_1, \dots, y_n)\, d\tau, \quad i = \overline{1, n} \qquad t, t_0 \in [a, b].$$

$$\tilde{y}_i(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f_i(\tau, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)\, d\tau, \quad i = \overline{1, n}$$

$$\Rightarrow |y_i(t) - \tilde{y}_i(t)| \le \left| \int_{t_0}^{t} |f_i(\tau, \bar{y}(\tau)) - f_i(\tau, \tilde{\bar{y}}(\tau))|\, d\tau \right| \le$$

$\leq L \left| \int_{t_0}^{t} (|y_1(\sigma) - \tilde{y}_1(\sigma)| + \ldots + |y_n(\sigma) - \tilde{y}_n(\sigma)|) d\sigma \right|$, $i = \overline{1,n}$, $L = \max\limits_{i=\overline{1,n}} L_i$.

$\exists\ z(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} |y_i(t) - \tilde{z}_i(t)|$

Тогда $|y_i(t) - \tilde{y}_i(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} z(\sigma) d\sigma \right|$, $i = \overline{1,n}$, $t \in [a, b]$.

Сложим все нер-ва: $z(t) \leq nL \left| \int_{t_0}^{t} z(\sigma) \right|$, $t \in [a,b]$.

По лемме Гронуола-Беллмана при $c = 0$, $b = nL$ получим

$z(t) \equiv 0$, т.е. $\bar{y}(t) \equiv \bar{\tilde{y}}(t)$. ∎

БИЛЕТ 7

Теор. о ∃!ЗК для норм. сист ОДУ на всем отрезке

Теорема 7.

Пусть в опр. ЗК для норм. сист $f_k(t,\bar{y}) \in C(D_\infty)$ и удовл. усл. Липшица по $\bar{y}$ в D с конст. L, где $D = \{t \in [a,b], \bar{y} \in \mathbb{R}^n\}$.
Тогда на всём отрезке $[a,b]$ ∃ реш. ЗК для норм. сист ОДУ.

▷ Идея: $\triangleleft$ $\{y_i^k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, $i=\overline{1,n}$, где $y_i^0(t) = y_{0i}$, $y_i^k(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^{t} f_i(\sigma, \bar{y}^{k-1}(\sigma))d\sigma$
Док-ся, что $\{y_i^k(t)\}_{k=1}^{\infty} \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} y_i(t)$, $k \to +\infty$, причем $y_i(t)$ удовл. всем усл. леммы о редукции и инт ур-ем ⇒ явл. реш ЗК норм сист. ОДУ

1) Покажем по индукции, что $y_i^k(t) \in C[a,b]$ $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

а) $y_i^0(t) = y_{0i} = const \in C[a,b]$

б) Пусть $y_i^k(t) \in C[a,b] \Rightarrow y_i^{k+1}(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^{t} f_i(\sigma, \bar{y}^k(\sigma))d\sigma \Rightarrow y_i^{k+1}(t) \in C[a,b]$.

2) Покажем по индукции, что $|y_i^{k+1}(t) - y_i^k(t)| \le B(nL)^k \frac{|t-t_0|^k}{k!}$, $i=\overline{1,n}$, $k=1,2,\dots$
на $[a,b]$, где $L = \max_{i=\overline{1,n}} L_i$, $B = \max_{i=\overline{1,n}} \max_{t\in[a,b]} \left|\int_{t_0}^{t} f_i(\sigma, y_{01},\dots,y_{0n})d\sigma\right|$.

а) $k=0$: $|y_i^1(t) - y_i^0(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} f_i(\sigma, y_{01},\dots,y_{0n})d\sigma\right| \le B$.

б) Пусть $k=m-1$ – верно, тогда
$$|y_i^m(t) - y_i^{m-1}(t)| \le BL^k \frac{|t-t_0|^k}{k!} n^k.$$

$$|y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| \le \left|\int_{t_0}^{t} |f_i(\sigma, y_1^m(\sigma),\dots,y_n^m(\sigma)) - f_i(\sigma, y_1^{m-1}(\sigma),\dots,y_n^{m-1}(\sigma))|d\sigma\right| \le$$
$+y_{0i} - y_{0i}$

$$\{\text{усл Липш}\} \le \left|\int_{t_0}^{t} L\left(|y_1^m(\sigma) - y_1^{m-1}(\sigma)| + |y_2^m(\sigma) - y_2^{m-1}(\sigma)| + \dots + |y_n^m(\sigma) - y_n^{m-1}(\sigma)|\right)d\sigma\right| \le$$

$$\le \{\text{предполож. инд.}\} \le L\left|\int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{n} BL^{m-1} \frac{|\sigma-t_0|^{m-1}}{(m-1)!} n^{m-1} d\sigma\right| \le \frac{B(nL)^m}{(m-1)!}\left|\int_{t}^{t}|\sigma-t_0|^{m-1}d\sigma\right| =$$

$$= \frac{B(nL)^m}{m!}|t-t_0|^m$$

3) $\triangleleft$ на $[a,b]$ функ. ряд: $y_i^0(t) + \sum_{m=0}^{\infty}(y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t))$, $i=\overline{1,n}$

инд ⇒ на $[a,b]$ $|y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| \le B(nL)^m \frac{|t-t_0|^m}{m!}$, $m=0,1,\dots$ $\forall t \in [a,b]$
$(t-t_0) \le (b-a)$.

$$\Rightarrow |y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| \le B(nL)^m \frac{(b-a)^m}{m!} \quad \forall t \in [a,b],\ m=0,1,\dots$$

$$\sum_{m=q}^{p-1} \sup_{t\in[a,b]} |y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| \le \sum_{m=q}^{p-1} B(nL)^m \frac{(b-a)^m}{m!}$$

Т.к. $B(nL)^m \frac{(b-a)^m}{m!} \to 0$, при $m=q\to\infty$ по признаку Вейерштрасса
эти функ. ряды равн. сх-ся ⇒ $y_i^k(t) = y_i^0(t) + \sum_{m=0}^{k-1}(y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t))$, $i=\overline{1,n}$ –
сх-ся равн. на $[a,b]$ к $y_i(t)$ при $k\to\infty$ y_i – реш:
$y_i(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^{t} f_i(\sigma, y_1(\sigma), y_2(\sigma),\dots,y_n(\sigma))d\sigma$, $i=\overline{1,n}$ а значит и реш-м
(2.34) и (2.35) Билет 6 ■

БИЛЕТ 8

Теор. о $\exists!$ реш. ЗК для ОДУ n-го порядка на всем отрезке.

Опр 26 ЗК для ОДУ n-го порядка, разр. отн. произв. наз.:

$$(2.42)\ \begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \end{cases}$$

$$(2.43)\ \begin{cases} y(t_0) = y_{01} \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n} \end{cases}$$

, где $(t_0, y_{01}, \dots, y_{0n}) \in D$ $\quad f(t, y, p_1, \dots, p_{n-1}) \in C(D)$

$D = \{t \in [a,b],\ (y, p_1, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{R}^n\}$.

Опр 27 Ф-ия $y(t)$ наз. реш. ЗК (2.42) и (2.43) на $[a,b]$, если $y(t) \in C^n[a,b]$, $y(t)$ - удовл-т (2.42) и (2.43).

Теорема 8. $\exists!$ реш ЗК для ОДУ n-го пор. разр. отн. произв.

Пусть $f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \in C(D)$ и удовл-т в D усл-ию Липшица с const $L_1 > 0$:

$$\left| f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) - f(t, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n) \right| \le L_1 \sum_{i=1}^{n} |y_i - \tilde{y}_i|$$

$$\forall t \in [a,b],\ \forall (y_1, y_2, \dots, y_n), (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда $\exists!$ $y(t)$ явл. реш ЗК (2.42) и (2.43) на $[a,b]$.

$\blacktriangleright$ Пусть $y(t)$ - реш ЗК (2.42) и (2.43) на $[a,b]$. Введем ф-ии:

$$y_1(t) = y(t),\ y_2(t) = y'(t),\ \dots,\ y_n(t) = y^{(n-1)}(t).$$

$\Rightarrow$ ф-ии $y_1(t), \dots, y_n(t)$ - реш ЗК для норм. сист. ОДУ:

$$(2.45)\ \begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y_3(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}'(t) = y_n(t) \\ y_n'(t) = f(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \end{cases}$$

$$(2.46)\ \ y_i(t_0) = y_{0i},\quad i = \overline{1,n}.$$

Сист-ма (2.45) - частной стр. норм. сист с ф-ями

$$f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) = y_{i+1} \qquad i = \overline{1, n-1}$$

$$f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) = f(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Эти ф-ии огр-ны и непр на D и удовл. усл-ию Липшица с const $L = \max\{1, L_1\}$. Поэтому (2.45) и (2.46) удов-т усл-ию Теоремы 6

$\Rightarrow$ реш (2.45) и (2.46) - ед-но $\Rightarrow$ (2.42) и (2.43) - ед-но.

Д-м $\exists$ реш. $\triangleleft$ ЗК (2.45), (2.46). Для неё вып Теорема 7.

Т.е. $\exists\, y_i(t) \in C^1[a,b]$ удов-е (2.45) и (2.46).

Обозн. $y_1(t) = y(t)$:

$$y^{(n)}(t) = y_1^{(n)}(t) = y_n'(t) = f(t, y_1, \dots, y_n) \in C[a,b].$$

$$y(t_0) = y_1(t_0) = y_{01},\ y'(t_0) = y_2(t_0) = y_{02}, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_n(t_0) = y_{0n}.$$

Таким образом $y(t) \in C^n[a,b]$ и $y(t)$ удов-т (2.42) и (2.43) $\Rightarrow$ $y(t)$ - реш Коши (2.42) и (2.43) $\blacksquare$

БИЛЕТ 9

Теорема о $\exists!$ реш. лин. сист ОДУ и реш. лин. ОДУ n-го порядка по отр

Опр 28 лин. ОДУ n-го порядка – ОДУ вида:

(2.49) $a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)y(t) = f(t)$, где $a_n(t)$ и $f(t)$ задан. и непрерывн. на $[a,b]$ ф-ии и $a_0(t) \neq 0$ на $[a,b]$.

Опр 29 ЗК для лин ОДУ n-го порядка:

(2.50) $\begin{cases} a_0(t)y^{(n)}(t) + \dots + a_n(t)y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_{0_1}, y'(t_0) = y_{0_2}, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{0_n} \end{cases}$ $t, t_0 \in [a,b]$.

> Теорема 9. Теорема для лин. ОДУ.
>
> Пусть в опр. ЗК $a_i(t), f(t) \in C[a,b]$, $i=\overline{1,n}$, $a_0(t) \neq 0$ на $[a,b]$.
> Тогда $\exists!$ реш ЗК на $[a,b]$ (2.49) и (2.50).

▶ Перепишем ур-ие из опр в виде:

$$y^{(n)} = \frac{f(t)}{a_0(t)} - \frac{a_n(t)}{a_0(t)}y(t) - \dots - \frac{a_1(t)}{a_0(t)}y^{(n-1)}(t) = g(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

$g(t, p_1, \dots, p_{n-1}) \in C(D)$, $D = \{t \in [a,b], (y, p_1, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{R}^n\}$

Производные g по $y, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ $\exists$ и огр повсюду.

$$L = \max_{i=\overline{1,n}} \max_{t \in [a,b]} \left| \frac{a_k(t_0)}{a_0(t_0)} \right|$$, т.е. g удовл. усл. Липшица.

$\Rightarrow$ по Теореме 8 $\exists!$ реш ЗК для лин ОДУ. ■

Опр 30 ЗК для лин сист. ОДУ (СЛДУ) под:

(2.47), **(2.48)** $\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}(t)y_1(t) + \dots + a_{1n}(t)y_n(t) + f_1(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{n1}(t)y_1(t) + \dots + a_{nn}(t)y_n(t) + f_n(t) \\ y_1(t_0) = y_{0_1}, \dots, y_n(t_0) = y_{0_n} \end{cases}$ $t, t_0 \in [a,b]$, где $f_i \in C[a,b]$, a_{ij}, $i,j = \overline{1,n} \in C[a,b]$.

> Теорема 10. Теорема для СЛДУ.
>
> Пусть в опр ЗК $a_{ij}(t), f_i(t) \in C[a,b]$, $i,j = \overline{1,n}$. Тогда $\exists!$ реш ЗК (ед набор ф-ий $y_1(t), \dots, y_n(t)$ явл. реш (2.47) и (2.48) на $[a,b]$).

▶ Сист. (2.47) явл. частн случаем ЗК для норм. сист. ОДУ

$$f_i(t, y_1, \dots, y_n) = a_{i1}(t)y_1 + \dots + a_{in}(t)y_n + f_i(t), \quad i = \overline{1,n}.$$

Эти ф-ии $f_i \in C[a,b]$, $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовл-т усл-ию Липшица

$$L = \max_{i,j=\overline{1,n}} \max_{t \in [a,b]} |a_{ij}(t)|$$. $\Rightarrow$ вып. усл-е Теоремы 6 и 7

$\Rightarrow \exists!$ реш на $[a,b]$ ■

БИЛЕТ 10

Три теоремы об общ. св-х лин ОДУ n-го пор.

Опр 30 Лин-ым дифф. опер. n-го порядка наз. оператор:

$$L[y] = a_0(t)\,y^{(n)}(t) + a_1(t)\,y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\,y'(t) + a_n(t)\,y(t),$$ где

$a_k(t) \in C[a,b]$, $a_0(t) \neq 0$, $\forall t \in [a,b]$.

Теорема 11 Если ф-ии $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ — реш ур-ий $L[y_k] = f_k(t)$, то $y(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k y_k(t)$, $c_k \in \mathbb{C}$ яв. реш. $L[y] = f(t)$, где $f(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k(t)$.

▶ $L[y] = L\left[\sum_{k=1}^{m} c_k y_k(t)\right] = \sum_{k=1}^{m} c_k L[y_k(t)] = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k(t) = f(t)$, $t \in [a,b]$. ■

Т.к. опер. дифф-линеен.

Следствие л/к решений однород ур-я — реш. однород ур-я. Разность двух реш. неоднород. с одинаковой правой частью — реш. однород. ур-я.

Т.е. $\exists\ L[y_1] = 0, L[y_2] = 0 \Rightarrow L(c_1y_1 + c_2y_2) = 0$. $L[y_1] = f(t), L[y_2] = f(t) \Rightarrow L[y_1 - y_2] = 0$.

Теорема 12 Реш. ЗК:
$$\begin{cases} L[y] = f(t) \\ y(t_0) = y_{00} \\ y'(t_0) = y_{01} \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n-1} \end{cases}$$
представимо в виде

$y(t) = v(t) + w(t)$, где $v(t)$ — реш ЗК для неоднородн. ур-ия с нулев. начальными усл-ми:
$$\begin{cases} L[v] = f(t) \\ v(t_0) = 0 \\ v'(t_0) = 0 \\ \vdots \\ v^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases}$$
, а $w(t)$ — реш ЗК для однород. ур-ия с ненулев. нач. усл-ми:
$$\begin{cases} L[w] = 0 \\ w(t_0) = y_{00} \\ w'(t_0) = y_{01} \\ \vdots \\ w^{(n-1)}(t_0) = y_{0n-1} \end{cases}$$

▶ $y(t) = v(t) + w(t)$ удовл. неоднородн. ур-ию по Теореме 11.

Нач. усл.: $y^{(k)}(t_0) = v^{(k)}(t_0) + w^{(k)}(t_0) = 0 + y_{0k} = y_{0k}$, $k = \overline{0, n-1}$.

Т.к. $L[v+w] = f(t) + 0$. ■

Теорема 13 Реш. ЗК для однород. ур-ия: $\begin{cases} L[y]=0 \\ y(t_0)=y_{00} \\ y'(t_0)=y_{01} \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0)=y_{0n-1} \end{cases}$

представимо в виде суммы $y(t)=\sum_{m=0}^{n-1} y_m(t)\,y_{0m}$, где $y_m(t)$ – реш. ЗК Коши: $\begin{cases} L[y_m]=0 \\ y_m^{(m)}(t_0)=1 \\ y_m^{(k)}(t_0)=0 \end{cases}$ $\forall k \in \overline{0,n-1}\setminus\{m\}$.

▶ $y(t)$ – реш однород ур-ия как л/к реш $y_m(t)$ однор-го ур-я с пост. коэфф. по теореме 11. Нач усл-я:

$$y^{(k)}(t_0)=\sum_{m=0}^{n-1} y_m^{(k)}(t_0)\,y_0^{(m)} = y_k^{(k)}(t_0)\,y_{0k}=y_{0k}, \quad k=\overline{0,n-1}. \ ■$$

БИЛЕТ 11

Лин. завис. и независ. скаляр. ф-ций. Определитель Вронского. Теорема о необх. усл. лин. завис. скал. ф-ций. Примеры.

Опр 31 Ф-ии $y_1(t), \dots, y_n(t)$ наз. **линейно завис.** на $[a,b]$, если $\exists$ набор конст $c_1, \dots, c_n$: $\sum\limits_{k=1}^{n} |c_k| > 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k y_k(t) \equiv 0$ на $[a,b]$.
Если $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k y_k(t) \equiv 0 \Rightarrow$ что вып. только при $c_1 = \dots = c_n = 0$, то $y_i(t)$ – ЛНЗ на $[a,b]$.

Пример: $\sphericalangle$ $y_1 = t^2$, $y_2 = t|t|$.

1) на $[0,2]$ – ЛЗ, т.к. $y_1 - y_2 = 0$
2) на $[-1,0]$ – ЛЗ, т.к. $y_1 + y_2 = 0$
3) на $[-1,2]$ – ЛНЗ, т.к. из $c_1 y_1 + c_2 y_2 \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} c_1 y_1(-\frac{1}{2}) + c_2 y_2(-\frac{1}{2}) = 0 \\ c_1 y_1(\frac{1}{2}) + c_2 y_2(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$.

Опр 32 **Определителем Вронского** системы ф-ций $y_1, \dots, y_n \in C^{n-1}[a,b]$ наз. зависящ. от $t \in [a,b]$ опр-ль:

$$W[y_1, \dots, y_n](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Теорема 14. Теорем. о необх. условии ЛЗ.

Пусть $y_1, \dots, y_n \in C^{(n-1)}[a,b]$ и ЛЗ на $[a,b]$. Тогда $W[y_1, \dots, y_n] \equiv 0$ на $[a,b]$.

▶ Т.к. ЛЗ $\Rightarrow \exists c_1, \dots, c_n : \sum |c_i| > 0$ и $c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \equiv 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow c_1 y_1' + \dots + c_n y_n' = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow c_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)} \equiv 0 \Rightarrow$
СЛАУ относит. $c_1, \dots, c_n$ имеет нетрив. реш. $\Rightarrow$ её опр $= 0 \Rightarrow$
$W[y_1, \dots, y_n] \equiv 0$ ■

Замечание: Обратное неверно:
Пусть $y_1 = t^2$, $y_2 = t|t|$ – ЛНЗ на $[-2,2]$, но $W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} t^2 & t|t| \\ 2t & 2|t| \end{vmatrix} \equiv 0$.

БИЛЕТ 12

Лин. зависим. и независим. решений лин. однородн. ОДУ n-го порядка. Теорема об альтернативе для опр. Вронского.

Теорема 14 Теорема о необх. условии ЛЗ.

Если $y_1, \dots, y_n \in C^{(n-1)}[a,b]$ и ЛЗ на $[a,b]$, то $W[y_1, \dots, y_n] \equiv 0$ на $[a,b]$.

▶ Т.к. ЛЗ $\Rightarrow \exists c_1, \dots, c_n : \sum |c_i| > 0$ и $c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \equiv 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c_1 y_1' + \dots + c_n y_n' = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow c_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)} \equiv 0$ {т.к. опер. дифф-ния

$\Rightarrow$ СЛАУ относит. $c_1, \dots, c_n$ имеет нетрив реш. $\Rightarrow$ её опр $= 0 \Rightarrow$
$W[y_1, \dots, y_n] \equiv 0$ ■

Замечание. Дост. усл. ЛНЗ.

Если $\exists t_0 \in [a,b] : W[y_1, \dots, y_n](t_0) \neq 0$, то $y_1, \dots, y_n$ – ЛНЗ на $[a,b]$

Теорема 15. Об альтернативе.

Для реш-й $y_1(t), \dots, y_n(t)$ лин. однород. ур-ия порядка n:

$$a_0(t) y^{(n)}(t) + a_1(t) y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t) y(t) = 0 \quad (3.19)$$

$y(t) \in C^{(n)}[a,b]$, $a_0(t) \neq 0$ на $[a,b]$ справедлива альтернатива:

- Либо $W[y_1, \dots, y_n](t) \equiv 0$ на $[a,b]$ и $y_1, \dots, y_n$ ЛЗ на $[a,b]$.
- Либо $W[y_1, \dots, y_n](t) \neq 0$ на $[a,b]$ и $y_1, \dots, y_n$ ЛНЗ на $[a,b]$.

▶ 1) Пусть $\exists t_0 \in [a,b] : W[y_1, \dots, y_n](t_0) = 0$.

Рассм. СЛАУ: $\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + \dots + c_n y_n(t_0) = 0 \\ \dots \\ c_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases}$ **(3.20)** Т.к. $\det = W(t_0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ нетрив. реш. $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n$, $\sum_{k=1}^{n} |\tilde{c}_k| > 0$.

Рассм. $y(t) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{c}_k y_k(t)$. Из теоремы 11 $\Rightarrow$ эта ф-ия – реш. (3.19), из (3.20) $\Rightarrow y^{(m)}(t_0) = 0$, $m = \overline{0, n-1}$.

$\Rightarrow y(t)$ – реш. (3.19) и удовл. нул. нач. усл. в t_0. По теореме 9 о ед. реш ЗК для лин. ОДУ $y(t) \equiv 0 \Rightarrow$

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{c}_k y_k(t) = 0, \ t \in [a,b]$$

$\Rightarrow y_1, \dots, y_n$ – ЛЗ на $[a,b]$ и по теореме 14 $W[y_1, \dots, y_n](t) = 0$.

2) Пусть $\exists t_0 \in [a,b] : W[y_1, \dots, y_n](t_0) \neq 0$ то по замеч. из Теоремы 14 $\Rightarrow y_1, \dots, y_n$ ЛНЗ на $[a,b] \Rightarrow W[y_1, \dots, y_n](t_0) \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$. ■

БИЛЕТ 13

Фундаментальная система реш. лин. однород. ОДУ n-го порядка. Теорема о $\exists$ ФСР. Теорема об общ. реш. лин. однород. ОДУ n-го порядка.

Опр 33 Лин. однород. ОДУ n-го порядка - ур-ие вида:

(3.19) $L[y] = a_0(t)\, y^{(n)}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\, y'(t) + a_n(t)\, y(t) = 0$, $a_0(t) \neq 0$.

Опр 34 ФСР $L[y]$ на $[a,b]$ - система из n ЛНЗ реш $L[y]=0$

Теорема 16. Теорема о $\exists$ ФСР.

Пусть в $L[y]$ $a_k(t) \in C[a,b]$, $k=\overline{0,n}$, $a_0(t) \neq 0$ $\forall t\, [a,b]$.

Тогда $\exists$ ФСР $L[y]=0$ на $[a,b]$.

▶ Рассм. $B \in \mathbb{C}^{n\times n} = \{b_{ij}\}$: $|B| \neq 0$. Пусть $y_j(t)$ - реш. ЗК для (3.19):

$$\begin{cases} y_j(t_0) = b_{1j} \\ y_j'(t_0) = b_{2j}, \quad j=\overline{1,n}. \\ \vdots \\ y_j^{(n-1)}(t_0) = b_{nj} \end{cases}$$

По теореме 9 $\exists!$ $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ - реш.

$W[y_1, \ldots, y_n](t_0) = |B| \neq 0 \Rightarrow$ по теореме 15 оно $\neq 0$ $\forall t \in [a,b]$ и $y_1, \ldots, y_n$ - ЛНЗ на $[a,b] \Rightarrow$ образуют ФСР на $[a,b]$ ■

Замечание: ФСР опр. неоднозначно, меняем B ($\det B \neq 0$) $\Rightarrow$ меняем ФСР.

Опр 35 Общим реш. $L[y] = f(t)$ на $[a,b]$ наз $y(t, c_1, \ldots, c_n)$, где $c_1, \ldots, c_n$ - $\forall$const, n - порядок $L[y] = f(t)$:

1) $L[y(t, c_1, \ldots, c_n)] = f(t)$, $\forall c_1, \ldots, c_n$.

2) $\forall \tilde{y}(t)$: $L[\tilde{y}] = f(t)$ может быть получено из $y(t, c_1, \ldots, c_n)$

$\exists\ \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n$ - const : $\tilde{y}(t) = y(t, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n)$.

Теорема 17. Об общ. реш. одн ОДУ

Пусть $y_1, \ldots, y_n$ - ФСР $L[y]=0$ на $[a,b]$. Тогда общ. реш. этого ОДУ на $[a,b]$ имеет вид $y_{oo}(t) = c_1 y_1(t) + \ldots + c_n y_n(t)$ $\forall c_j \in \mathbb{C}$.

▶ Т.к. ЛК реш. ур-ия (3.19) - реш (3.19), то при $\forall c_j$ y_{oo} - реш. (3.19). Покажем, что $\forall$ реш $L[y]=0$ может быть получено из y_{oo} выбором c_j.

Пусть $\tilde{y}(t)$ - реш (3.19). Рассм СЛАУ отн. c_j.

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + \ldots + c_n y_n(t_0) = \tilde{y}(t_0) \\ \vdots \\ c_n y_1^{(n-1)}(t_0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) = \tilde{y}^{(n-1)}(t_0) \end{cases}, \quad t_0 \in [a,b].$$

$\det = \det$ Вронского в $t_0 \neq 0$ т.к. $y_1, \ldots, y_n$ - ЛНЗ $\Rightarrow \exists!$ реш $\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n$.

$\triangleleft$ ф-ию $\hat{y}(t) = \sum\limits_{k=1} \tilde{c}_k y_k(t)$. Эта ф-ия – реш (3.19) $L[y]=0$.
Т.к. $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n$ – реш СЛАУ $\Rightarrow$ $\hat{y}^{(k)}(t_0) = \tilde{y}^{(k)}(t_0)$, $k=\overline{0, n-1}$.
$\Rightarrow$ $\tilde{y}(t)$ и $\hat{y}(t)$ – реш (3.19) $L[y]=0$ и удовл-т одним и тем усл ЗК в t_0 $\Rightarrow$ по теорем 9 $\exists!$ реш ЗК:

$$\tilde{y}(t) = \hat{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{c}_k y_k(t). \quad \blacksquare$$

БИЛЕТ 14

Теор. об общ. реш. лин. неоднород. ОДУ n-го пор. Метод вар. постоянных.

Опр 35 Общим реш. лин. неодн. ОДУ n-го пор. $L[y] = f(t)$ на $[a,b]$ наз. $y(t, c_1, \dots, c_n)$, где $c_1, \dots, c_n$ - $\forall$ const, если:

1) $L[y(t, c_1, \dots, c_n)] = f(t)$, $\forall c_1, \dots, c_n$

2) $\forall \tilde{y}(t) : L[\tilde{y}] = f(t)$ может быть получено из $y(t, c_1, \dots$

$\exists \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n$ - const : $\tilde{y}(t) = y(t, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n)$.

Теорема 18. Теорема об общ. реш. неодн. ОДУ.

Пусть $y_1, \dots, y_n$ - ФСР лин. однородн. ур-ия $L[y] = 0$ на $[a,b]$, $y_ч(t)$ - частное реш. $L[y] = f(t)$, тогда общ. реш. $L[y] = f(t)$ на $[a,b]$ имеет вид:

$$y_{он}(t) = y_ч(t) + y_{оо}(t) = y_ч(t) + c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t), \quad c_k \in \mathbb{C}$$

в $L[y] = f(t)$, $a_k(t), f(t) \in C[a,b]$, $a_0(t) \neq 0$, $\forall t \in [a,b]$.

▶ 1) $y_{он}(t)$ - реш $L[y] = f(t)$, т.к. $L[y]$ - линеен, $L[y_{оо}(t)] = 0$.

2) $\forall$ другое решение можно представить в виде (подбирая $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n$):

$$\tilde{y}(t) = y_ч(t) + \tilde{c}_1 y_1(t) + \dots + \tilde{c}_n y_n(t)$$

Пусть $\tilde{y}(t)$ - реш $L[y] = f(t)$. $y(t) = \tilde{y}(t) - y_ч(t)$ - реш $L[y] = 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ По теореме 17 (об общем реш. однород. ур-ия)

$\exists \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n \in \mathbb{C}$, что на $[a,b]$ $y(t) = \tilde{c}_1 y_1(t) + \dots + \tilde{c}_n y_n(t)$ ■

Метод вариации постоянных

(Решаем $L[y] = 0$, затем $c_k \to c_k(t)$ и сост. сист. Решаем относит $c_k'(t)$, потом интегр. и подставляем)

Из теоремы 18 $\Rightarrow$ для постр. общего реш. достаточно знать ФСР $L[y] = 0$ и какое-нибудь реш $L[y] = f(t)$.

Рассм. $L[y] = f(t)$. Пусть $y_1, \dots, y_n$ - ФСР $L[y] = 0$ и $a_k(t), f(t) \in C[a,b]$, $a_0(t) \neq 0$. Частное реш. ищется в виде $y_{оо}$ (общ. реш. однород. ур-ия) в котором константы $c_1, \dots, c_n$ заменены на $c_1(t), \dots, c_n(t)$ (произв. дифф.) на $[a,b]$:

$$y_ч(t) = c_1(t) y_1(t) + \dots + c_n(t) y_n(t).$$

Пусть производные $c_k'(t)$ ф-ий опр-ся для $\forall t \in [a,b]$ из СЛАУ.

$$\begin{cases} c_1'(t) y_1(t) + \dots + c_n'(t) y_n(t) = 0 \\ c_1'(t) y_1'(t) + \dots + c_n'(t) y_n'(t) = 0 \\ \vdots \\ c_1'(t) y_1^{(n-1)}(t) + \dots + c_n'(t) y_n^{(n-1)}(t) = \dfrac{f(t)}{a_0(t)} \end{cases}$$

Т.к. ф-ии $y_k(t)$ - обр-ют ФСР, то опр-ль этой СЛАУ $W[y_1, \dots, y_n] \neq 0$ (т.к. $y_1, \dots, y_n$ - ЛНЗ на ФСР) $\Rightarrow \exists!$ реш:

$$c'_k(t) = g_k(t),\ k = \overline{1,n} \Rightarrow \frac{dc_k(t)}{dt} = g_k(t) \Leftrightarrow$$

$$c_k(t) = \int_{t_0}^{t} g_k(\tau)\,d\tau.$$

Таким образом

$$\begin{cases} y'_ч(t) = c_1(t)y'_1(t) + \dots + c_n(t)y'_n(t) \\ y''_ч(t) = c_1(t)y''_1(t) + \dots + c_n(t)y''_n(t) \\ \vdots \\ y_ч^{(n-1)}(t) = c_1(t)y_1^{(n-1)}(t) + \dots + c_n(t)y_n^{(n-1)}(t) \\ y_ч^{(n)}(t) = c_1(t)y_1^{(n)}(t) + \dots + c_n(t)y_n^{(n)}(t) + \sum\limits_{k=1}^{n} c'_k(t)y_k^{(n-1)}(t) = \end{cases}$$

$$= c_1(t)y_1^{(n)}(t) + \dots + c_n(t)y_n^{(n)}(t) + \frac{f(t)}{a_0(t)}$$

Подст. $y_ч(t)$ в $L[y]$:

$$L[y_ч] = a_0(t)\frac{f(t)}{a_0(t)} + a_0(t)\sum_{k=1}^{n} c_k(t)y_k^{(n-1)}(t) + \dots +$$

$$+ a_{n-1}(t)\sum_{k=1}^{n} c_k(t)y'_k(t) + a_n(t)\sum_{k=1}^{n} c_k(t)y_k(t) =$$

$$= f(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k(t)L[y_k(t)] = f(t) + 0 = f(t),\ t \in [a, b]$$

$L[y_k(t)] = 0$, т.к. $y_k(t)$ - реш $L[y] = 0$.

$$\Rightarrow y_ч(t) = c_1(t)y_1(t) + \dots + c_n(t)y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} y_k(t)\int_{t_0}^{t} g_k(\tau)\,d\tau.$$

БИЛЕТ 15

Лемма и теорема о построении ФСР для ОДУ n-го порядка с пост. коэфф.

Теорема 19. $\exists\ L[y]$, $a_k \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$. $\exists$ корни $M(\lambda)$
$M(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ являются λ_k кр-ти m_k $(k=\overline{1,s})$
$\sum\limits_1^s m_k = n$. Тогда в кач-ве ФСР $L[y]=0$ можно взять ф-ии:
$e^{\lambda_k t}, te^{\lambda_k t}, \ldots, t^{m_k-1}e^{\lambda_k t}$ $(k=\overline{1,s})$.

▶ 1) Т.к. $\sum\limits_1^s m_k = n$, то ф-ий столько сколько надо.

2) Покажем, что все эти ф-ии реш $L[y]=0$. Воспольз. формулой: $\forall g(t) \in C^n[a,b]$: $L[g(t)\cdot e^{\lambda t}] = e^{\lambda t}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{M^{(k)}(\lambda)g^{(k)}(t)}{k!}$ (примем без д-ва)
$\exists\ p=\overline{0,m_k-1}$. Тогда $L[t^p e^{\lambda_k t}] = e^{\lambda_k t}\Big[\underbrace{\sum\limits_{l=0}^{m_k-1}\frac{(t^p)^{(l)}M^{(l)}(\lambda_k)}{l!}}_{\Sigma_1} + \underbrace{\sum\limits_{l=m_k}^{n}\frac{(t^p)^{(l)}M^{(l)}(\lambda_k)}{l!}}_{\Sigma_2}\Big]$

Так как λ_k — корень кр-ти m_k, то $M(\lambda) = (\lambda-\lambda_k)^{m_k}g(\lambda) \Rightarrow$
$\Rightarrow M^{(l)}(\lambda)$ при $l=\overline{0,m_k-1}$ содержит скобку $(\lambda-\lambda_k) \Rightarrow M^{(l)}(\lambda_k)=0$
$\forall l = \overline{0,m_k-1} \Rightarrow \Sigma_1 = 0$,
Так как $(t^p)^{(l)} = 0$ при $p \le m_{k}-1$, $l \ge m_k$, то $\Sigma_2 = 0$
$\Rightarrow L[t^p e^{\lambda_k t}] \equiv 0$ $\forall p \in \overline{0,m_k-1}$ $\forall k = \overline{1,s}$.

3) Предположим, что ф-ии ЛЗ на $[a,b]$. Тогда $\exists$ набор конст.: $c_1,\ldots,c_n$: $\sum|c_k|>0$:
$$\sum_{l=0}^{m_1-1}c_{l+1}t^l e^{\lambda_1 t} + \ldots + \sum_{l=0}^{m_s-1}c_{n-m_s+1+l}\,t^l e^{\lambda_s t} \equiv 0$$ на $[a,b]$, то есть
$p_1(t)e^{\lambda_1 t} + \ldots + p_s(t)e^{\lambda_s t} \equiv 0$ на $[a,b]$ **(*)**, где $p_k(t)$ — многочлен степени r_k: $r_k \le m_k - 1$. Без огр. общн. $p_s(t)$ — нетрив ($\neq 0$).

Домножим (*) на $e^{-\lambda_1 t}$ и продифф. по t m_1 раз
Поймем, что (*) $\Leftrightarrow Q_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \ldots + Q_s(t)e^{(\lambda_s-\lambda_1)t} \equiv 0$, где
$Q_k(t)$ — многоч-н той же степени r_k, что и исх. $p_k(t)$ $(k=\overline{2,n})$
В частности, $Q_s(t) = p_s(\lambda_s-\lambda_1)^{m_1}t^{r_s}+\ldots$,
Это так, потому что: $(p_k(t)e^{(\lambda_k-\lambda_1)t})'_t = e^{(\lambda_k-\lambda_1)t}((\lambda_k-\lambda_1)p_k(t)+p_k'(t))$
и т.д. вплоть до произв порядка m_k.
$$Q_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \ldots + Q_s(t)e^{(\lambda_s-\lambda_1)t} \equiv 0 \quad \textbf{(**)}$$
Домножим на $e^{-(\lambda_2-\lambda_1)t}$ и дифф по t m_2 раза, потом домножим на $e^{-(\lambda_3-\lambda_2)t}$ и продифф. m_3 раза и т.д.

В итоге получим:

$$\overset{\neq 0}{B_s}\,\overset{\neq 0}{(\lambda_2-\lambda_1)^{m_1}}\,\overset{\neq 0}{(\lambda_3-\lambda_2)^{m_2}}\dots\overset{\neq 0}{(\lambda_s-\lambda_{s-1})^{m_s}}\,t^{2s}+\dots\equiv 0 \text{ на } [a,b],\ \deg B_s = m_s$$

Однако $p_s \not\equiv 0$?! $\Rightarrow$ ф-ии ЛНЗ $\Rightarrow$ ФСР на $[a,b]$ ■

БИЛЕТ 16

Теорем. о постр. лин. ОДУ n-го порядка по задан. сист. реш. и об однозн. опр-ия ОДУ по ФСР. Формула Остроградского - Лиувилля

Обозн: $L_a[y] = y^{(n)}(t) + a_1(t)\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\, y'(t) + a_n(t)\, y(t)$ **(3.35)**

Теорема 20. Об однозн. $\rceil$ в $L_a[y]$ $a_k(t) \in C[a,b]$ $(k=\overline{1,n})$. Тогда $L_a[y]=0$ однозн. задается $\forall$ из своих ФСР.

▶ Фикс. $\forall$ ФСР $L_a[y]=0$: $y_1, \ldots, y_n$. $\rceil \exists$ $L_b[y] \equiv y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \ldots + b_n y_n \equiv 0$ имеющ. ту же ФСР. Тогда $y_1, \ldots, y_n$ - реш. $L_a[y] - L_b[y] = 0$ на $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $(a_1 - b_1)\, y^{(n-1)} + \ldots + (a_n - b_n)\, y = 0$ **(**)**

$\rceil \exists$ $t_0 \in [a,b]$: $a_1(t_0) \neq b_1(t_0)$. Тогда в силу непр-ти ф-ций $a_1(t), b_1(t)$
$\exists \varepsilon > 0$: $a_1(t) \neq b_1(t)$, $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset [a,b]$.

Поделим на $a_1(t) - b_1(t)$ и $\rceil$ $p_m(t) = \dfrac{a_m(t) - b_m(t)}{a_1(t) - b_1(t)}$:

$$y_k^{(n-1)}(t) + p_2 y_k^{(n-2)}(t) + \ldots + p_n(t)\, y_k(t) = 0, \quad t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \; k = \overline{1,n}$$

Получается, что $\exists$ n ЛНЗ $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ - реш ур-ия $(n-1)$ порядка (**) с непр коэфф. p_m. Но из теоремы 17 (об общем реш. лин. однород. дифф. ур-ия) $\Rightarrow$ ур-ие $(n-1)$ пор-ка имеет только $(n-1)$ ЛНЗ реш (!?)
$\Rightarrow a_1(t) = b_1(t)$ рав-во ост. ф-ий аналог. ■

Теорема 21. О построении.

$\rceil$ $y_1, \ldots, y_n \in C^n[a,b]$ и $W[y_1, \ldots, y_n] \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$.
Тогда $\exists$ лин. однород. дифф. ур-ие n-го порядка с непр. коэфф. и отл. от 0 коэфф при $y^{(n)}$: $y_1, \ldots, y_n$ - ФСР.

▶ $\triangleleft$ на $[a,b]$

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) & y(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \ldots & y_n'(t) & y'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)}(t) & y_2^{(n)}(t) & \ldots & y_n^{(n)}(t) & y^{(n)}(t) \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{(3.36)}$$

Разложим опр. (3.36) по посл. стол.
Коэфф. при $y^{(n)}(t)$ - $W[y_1, \ldots, y_n]$ и он $\neq 0$ на $[a,b]$. Поделив на этот опр-ль получим ур-ие вида (3.35) с непр на $[a,b]$ коэфф. При подстановке $y(t) = y_k(t)$ в (3.36) будет получатся опр-ль с 2-я одинаков стол. $\Rightarrow$ $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ - реш. получ. ур-ия. ■

Пример: Сост. лин. днород. дифф. ур-ие с непр. коэфф. наим. порядка, реш которого:

$$y_1(t) = 1, \; y_2(t) = \cos 2t, \; y_3(t) = \sin^2 t, \; t \in [1, \tfrac{3}{2}].$$

Очевидно, что $y_2 = y_1 - 2y_3 \Rightarrow y_1, y_2, y_3$ - ЛЗ, при этом $W[y_1, y_2] =$

$W = -2\cos 2t \neq 0 \quad \forall t \in [1, \frac{5}{2}]$

$\begin{vmatrix} 1 & \cos 2t \\ 0 & -2\sin 2t \end{vmatrix}$

y_1, y_2 и y_3 (как л/к) – реш:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos 2t & y \\ 0 & -2\sin 2t & y' \\ 0 & -4\cos 2t & y'' \end{vmatrix} = 0 \iff -2\sin 2t\, y'' + 4\cos 2t\, y' = 0 \iff y'' - 2\operatorname{ctg} 2t\, y' = 0$$

– лин. однород. дифф. ур-ие 2-го порядка.

Формула Остроградского - Лиувилля.

$L[y] = 0$, где $a_k \in C[a, b]$, $a_0(t) \neq 0 \ \forall t [a, b]$.

$$W[y_1, \dots, y_n](t) = W[y_1, \dots, y_n](t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(\sigma)\, d\sigma}$$

, $t, t_0 \in [a, b]$, $y_1, \dots, y_n$ – ФСР $L[y] = 0$

Вывод:

∃ $D(t)$ – опр-ль n-го порядка, эл-ты которого явл. ф-ии непр. дифф на $[a, b]$, $D'(t)$ – его произв, равной сумме n опр-й каждый из которых получен из $D(t)$ заменой одной из строк его производными.

$$W'[y_1, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Действительно применив правило выч. произв. к опр. Вронского все опред (кроме посл.) будут равны 0, т.к. у них есть одинак. строки с последней.

∃ $y_1, \dots, y_n$ – ФСР $L[y] = 0$ ((3.35)). Из теоремы 20 ⇒, что это ур-ие однозначно опр-ся своей ФСР ⇒ поделив (3.36) на опр-ль Вронского получим $L[y] = 0$ ((3.35)) ⇒

⇒ из (3.36) ⇒ $a_1(t) = \frac{-W'}{W}$. Интегр от t_0 до t:

$$W[y_1, \dots, y_n](t) = W[y_1, \dots, y_n](t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(\sigma)\, d\sigma}, \quad t \in [a, b].$$

БИЛЕТ 17

Общая теория однород. сист. ОДУ. Теор. об эквив. сист. ОДУ матричн. ОДУ. Св-ва реш. матриц ОДУ.

Опр 36 СЛДУ (сист. лин. ОДУ):

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t) y_1 + \ldots + a_{1n}(t) y_n + f_1(t) \\ \ldots \\ y_n' = a_{n1}(t) y_1 + \ldots + a_{nn}(t) y_n + f_n(t) \end{cases} \iff \bar{y}_t' = A(t)\bar{y}(t) + \bar{f}(t).$$

Опр 37 $\exists$ $A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$ Δ на $[a, b]$

$Y(t)$ – матр. $\{y_{ij}(t)\} \in C^1[a,b]$; $A(t) = \{a_{ij}(t)\} \in C[a,b]$

$B(t)$ – матр. $\{b_{ij}(t)\} \in C[a,b]$; Тогда $Y' = AY + B$ – матричн. ОДУ

Теорема 22. Об эквивал.

$Y(t)$ – реш. матричн. ОДУ $Y' = AY + B \iff$ каждый стб $\bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_n(t)$ м. $Y(t)$ – реш. сист. ОДУ $\bar{y}_1' = A\bar{y}_1 + \bar{b}_1, \ldots, \bar{y}_n' = A\bar{y}_n + \bar{b}_n$.

▶ $Y' = AY + B \iff (\bar{y}_1', \ldots, \bar{y}_n') = (A\bar{y}_1, \ldots, A\bar{y}_n) + (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n) \iff \bar{y}_k' = A\bar{y}_k + b_k,\ k = \overline{1,n}$ ■

Теорема 23. Св-ва матричн. ур-ий.

1) Если $Y(t)$ – реш. $Y' = AY$, то $\forall \bar{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n$ ф-ия $\bar{y}(t) = Y(t)\bar{c}$ реш $\bar{y}' = A\bar{y}$ (линейность).

2) Если $Y(t)$ – реш $Y' = AY$, то $\forall B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ то м. $X = YB$ – тоже реш. $X' = AX$.

▶ 1) $\bar{y}(t) = Y(t)\bar{c} = \sum_{k=1}^{n} c_k \bar{y}_k(t)$. По теореме 22 $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ – реш. $\bar{y}_k' = A\bar{y}_k,\ k = \overline{1,n}$ $\Rightarrow$ по принципу суперпозиции их л/к тоже реш.

$$y'(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \bar{y}_k'(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k A\bar{y}_k(t) = A\sum_{k=1}^{n} c_k \bar{y}_k(t) = A\bar{y}(t)$$

2) $X' = (YB)' = Y'B + Y\underset{0}{\underbrace{B'}} = Y'B = AYB = AX$. ■

БИЛЕТ 18

Лин. завис. и независ. вектор-ф-ий. Опр. Вронского. Теорема о необх. усл. завис. вектор ф-ий. Примеры.

Опр 38 $\bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_n(t)$ наз. ЛЗ на $[a,b]$, если $\exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C} : \sum_{k=1}^{n} |c_k| > 0$: $\sum_{k=1}^{n} c_k \bar{y}_k(t) \equiv \Theta$ на $[a,b]$.

Если $\sum_{k=1}^{n} c_k \bar{y}_k(t) \equiv \Theta$ вып. только при $c_1 = \dots = c_n = 0$, то $\bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_n(t)$ наз. ЛНЗ на $[a,b]$.

Пример: $\triangleleft$ $\bar{y}_1 = (t^2, t^3)$, $\bar{y}_2 = (t|t|, t^2|t|)$.

1) на $[0,1]$: $\bar{y}_1 - \bar{y}_2 \equiv 0 \Rightarrow$ ЛЗ.

2) на $[-1,0]$: $\bar{y}_1 + \bar{y}_2 \equiv 0 \Rightarrow$ ЛЗ.

3) на $[-1,1]$: $c_1\bar{y}_1 + c_2\bar{y}_2 \equiv 0 \doteq 0 \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow$ ЛНЗ.

Опр 39 $\exists \bar{y}_k(t) \in C[a,b]$ $(k = \overline{1,m})$. Опр-ль Вронского от ф-ий $\bar{y}_k(t)$ наз. $W[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n] = \begin{vmatrix} y_{11}(t), & \dots, & y_{1n}(t) \\ \vdots & & \\ y_{n1}(t), & \dots, & y_{nn}(t) \end{vmatrix}$, где $\bar{y}_k = (y_{1k}, \dots, y_{nk})$.

Теорема 24. Необх. усл. ЛЗ.

Если $\bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_n(t)$ ЛЗ на $[a,b]$, то $W[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n](t) \equiv 0$ на $[a,b]$.

▶ $\bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_n(t)$ – ЛЗ $\Rightarrow$ стб в $W[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n]$ – ЛЗ. $\Rightarrow W \equiv 0$ ■

Замечание Обратное неверно.

$\bar{y}_1(t) = (t^2, t^3)$, $\bar{y}_2(t) = (t|t|, t^2|t|)$ – ЛНЗ на $[-1,1]$ но

$W[\bar{y}_1, \bar{y}_2] = \begin{vmatrix} t^2 & t^3 \\ t|t| & t^2|t| \end{vmatrix} \equiv 0$.

БИЛЕТ 19

Лин. завис. и независ. реш. лин. однородн. сист. ОДУ. Теор. об альтернативе для опр. Вронского.

> **Теорема 25. Об альтернативе.**
> $\rceil\ a_{ij}(t) \in C[a,b]$. Тогда для реш. $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ $Y' = AY$:
> - либо $W[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n] \equiv 0$ и $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ ЛЗ на $[a,b]$.
> - либо $W[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n] \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$ и $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ ЛНЗ на $[a,b]$.

▶ 1) $\rceil\ t_0 \in [a,b]$: $W[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n](t_0) = 0$.

$\sphericalangle$ $c_1\bar{y}_1(t_0) + \dots + c_n\bar{y}_n(t_0)$ – СЛАУ относ. $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$.

$W[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n](t_0) = 0 \Rightarrow \exists$ нетрив. реш. $\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n : \Sigma|c_k| > 0$ этой СЛ

$\sphericalangle$ $\hat{y}(t) = \Sigma c_k \bar{y}_k$: $\hat{y}(t)$ – реш $\begin{cases} \hat{y}' = A\hat{y} \text{ – т.к. реш.} \\ \hat{y}(t_0) \equiv \bar{\Theta} \text{ – по постр.} \end{cases}$

По теор. о $\exists!$ реш. ЗК для лин. сист. ОДУ, теорема 9:

$\bar{\Theta} = \bar{y}(t) = Y(t)\hat{c} = \hat{c}_1\bar{y}_1(t) + \dots + \hat{c}_n\bar{y}_n(t)$, $\forall t \in [a,b]$.

$\Rightarrow \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ – ЛЗ на $[a,b] \Rightarrow W[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n] = 0$ по теореме 24.

2) $\rceil\ t_0 \in [a,b]$: $W[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n](t_0) \neq 0$, тогда $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ ЛНЗ на $[a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow W[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n](t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$ ■

БИЛЕТ 20

ФСР лин. однород. сист. ОДУ. Теор. о ∃ФСР. Теор. об общ. реш. лин. однород. сист. ОДУ. Матрицант.

Опр 40 ФСР лин. однород. сист. ОДУ $\bar{y}' = A\bar{y}$ $(A = \{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{n})$ наз. набор из n ЛНЗ реш. $\bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_n(t)$ этой системы.

Опр 41 *Фундаментальной матрицей* соотв-щая решениям лин. однород. сист. ОДУ $\bar{y}' = A\bar{y}$ на $[a,b]$ наз:

$$Y = (\bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_n(t)). \quad (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n - \text{ФСР данной сист.}).$$

Согласно теореме 23 фундам. м. - реш. $Y' = AY$.
Согласно теореме 25 опр-ль фунд. м. $\neq 0$.

Теорема 26. О ∃ ФСР.
Пусть $a_{ij}(t) \in C[a,b]$. Тогда на $[a,b]$ ∃ ФСР $\bar{y}' = A\bar{y}$.

▶ Рассм. $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$: $\det B \neq 0$. Рассм. в количестве n ЗК:

$$\begin{cases} \bar{y}' = A\bar{y} \\ \bar{y}(t_0) = b_k \end{cases}, \text{ где } b_k - k\text{-й стб м. } B \ (k = \overline{1,n}).$$

По теореме 9, о ∃! реш. ЗК для лин. сист. ОДУ, эти ЗК имеют ! реш. на $[a,b]$: $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$, $W[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n](t_0) = \det B \neq 0$
$\Rightarrow \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_n(t)$ - ЛНЗ на $[a,b]$ $\Rightarrow$ образуют ФСР. ■

Замечание ФСР опр-на неоднозначно, другая $B \Rightarrow$ другая ФСР.

Замечание Для $\bar{y}_1 = (t^2, t^3)$, $\bar{y}_2 = (t|t|, t^2|t|)$ $W \equiv 0$, но они ЛНЗ на $[-1,1]$. Это означает, что они не могут быть ФСР на $[-1,1]$ ни для одной лин. одн. сист. с непр. коэфф., т.к. они вообще не могут быть реш. такой системы, иначе - противореч. с теоремой 25 (об альтернативе).

Опр 42 $\bar{y}(t, c_1, \dots, c_n)$ наз. *общим решением* $\bar{y}' = A\bar{y}$ на $[a,b]$, если:
1) $\forall (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^n$: $\bar{y}(t, c_1, \dots, c_n)$ - реш. этой сист. на $[a,b]$.
2) $\forall \bar{\varphi}(t)$ - реш. этой сист. на $[a,b]$: в результате выбора некотор. $\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n$ $\bar{\varphi}(t) \equiv \bar{y}(t, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n)$.

Теорема 27. Об общем решении однород.
Пусть в $\bar{y}' = A\bar{y}$ $a_{ij}(t) \in C[a,b]$. Тогда общ. реш. этой сист. это
$\bar{y}_{oo}(t) = c_1\bar{y}_1(t) + \dots + c_n\bar{y}_n(t) = Y(t)\bar{c}$, $c_k \in \mathbb{C}$ - const, $\bar{y}_n(t)$ - ФСР. ($Y(t)$ - фундам. м.).

▶ 1) $\bar{y}_{oo}(t)$ - реш. по теореме 23 как лк реш.
2) Покажем, что для $\forall$ наперед зад. реш. $\exists \bar{c}$: $\bar{y}(t) = Y(t)\bar{c}$.
Фикс. $\forall \bar{\varphi}(t)$ - реш. $\bar{y}' = A\bar{y}$ и некотор. $t_0 \in [a,b]$.
Пусть $Y(t) = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ - фунд. м.
Рассм. СЛАУ $Y(t_0)\bar{c} = \varphi(t_0)$. $\det Y(t_0) \neq 0$ т.к. $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ - ФСР $\Rightarrow \exists!$ реш. $\tilde{c}$.

$\Rightarrow \tilde{\bar{y}}(t) = \sum \tilde{c}_k \bar{y}_k$. Эта ф-ия – реш. $\begin{cases} \tilde{\bar{y}}' = A\tilde{\bar{y}} \\ \tilde{\bar{y}}(t_0) = \bar{\varphi}(t_0). \end{cases}$

реш. которой явл. и $\bar{\varphi}(t) \Rightarrow$ по теореме 9, о $\exists!$ реш. ЗК:

$\bar{\varphi}(t) = \tilde{c}_1 \bar{y}_1 + \ldots + \tilde{c}_n \bar{y}_n$. ∎

Опр 43 Матрициантом $\bar{y}' = A\bar{y}$ наз. $Z(t, t_0)$, она явл. реш ЗК:

$$\begin{cases} Z'(t, t_0) = A(t)\, Z(t, t_0) \\ Z(t, t_0) = Y(t)\, Y^{-1}(t_0). \end{cases}$$

БИЛЕТ 21

Теорема об общ. реш. лин. неоднород. сист. ОДУ. Метод вариац. пост.

Опр 44 $\bar{y}(t, c_1, \dots, c_n)$ наз. Общим. реш. $\bar{y}' = A\bar{y} + \bar{f}$ на $[a, b]$, если:

1) $\forall (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^n$: $\bar{y}(t, c_1, \dots, c_n)$ – реш. этой сист. на $[a, b]$.

2) $\forall \bar{\varphi}(t)$ – реш. этой сист. на $[a, b]$ может быть получено в рез-те выбора некотор. $\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n$: $\bar{\varphi}(t) \equiv \bar{y}(t, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n)$.

Теорема 28. Об общем решении неоднород.

Пусть $\bar{y}' = A\bar{y} + f(t)$, где $a_{ij}(t)$, $\bar{f}(t) \in C[a, b]$. Тогда общ. реш. этой сист. $\bar{y}_{он}(t) = Y(t)\bar{c} + \bar{y}_ч(t) = \bar{y}_{оо}(t) + \bar{y}_ч(t)$, где $\bar{y}_{оо}(t)$ – общ. реш $\bar{y}' = A\bar{y}$, $\bar{y}_ч(t)$ – частн. реш. неодн. сист. $\bar{y}' = A\bar{y} + f(t)$ (4.15)

▶ 1) $\bar{y}_{он}(t)$ – реш. как л/к реш. однород. и неоднород. реш.

2) Д-м, что для $\forall$ наперёд заданного $\tilde{\bar{y}}(t)$ – реш $\bar{y}' = A\bar{y} + f(t)$ $\exists\, \tilde{\bar{c}} \in \mathbb{C}^n$: $\tilde{\bar{y}}(t) = Y(t)\tilde{\bar{c}} + \bar{y}_ч(t)$.

Пусть $\tilde{\bar{y}}(t)$ – реш (4.15). Тогда $\bar{y}(t) = \tilde{\bar{y}}(t) - \bar{y}_ч(t)$ и $\left(A(t)\tilde{\bar{y}}(t) + f(t)\right) - \left(A(t)\bar{y}_ч(t) + f(t)\right) = A(t)\left(\tilde{\bar{y}}(t) - \bar{y}_ч(t)\right) = A(t)\underline{y(t)}$, реш однород. системы. Тогда по теореме 27 $\exists\, \tilde{c}_n \in \mathbb{C}^n$: $\bar{y}(t) = Y(t)\tilde{\bar{c}} \Rightarrow \tilde{\bar{y}}(t) = Y(t)\tilde{\bar{c}} + \bar{y}_ч(t)$ ■

Теорема 29. Метод вариац. постоянных. (4.3.4)

Пусть в $\bar{y}' = A\bar{y} + \bar{f}(t)$, $a_{ij}(t)$, $\bar{f}(t) \in C[a, b]$. Тогда частное реш. этой сист

$$\bar{y}_ч(t) = \int_{t_0}^{t} Z(t, \sigma)\bar{f}(t)\, d\sigma, \quad t \in [a, b],$$

где $Z(t, \sigma)$ – матрициант $(= Y(t_0)Y^{-1}(t_0))$, $\bar{y}_ч(t_0) = 0$.

▶ Пусть $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ – ФСР. $\bar{y}' = A\bar{y}$. Тогда общ. реш. однород. сист. –
$\bar{y}(t) = \bar{y}_{оо}(t) = c_1\bar{y}_1(t) + \dots + c_n\bar{y}_n(t) = Y(t)\bar{c}$: $(Y(t)\bar{c}(t))' = A(Y(t)\bar{c}(t) + \bar{f}(t))$

(Воспользовались методом вариации постоянных, согласно которому частное реш. ищется с заменой вектора констант на произв. непр. ф-ии в $\bar{y}_{оо} = \dots$)

$$\bar{y}'(t) = Y'(t)\bar{c}(t) + Y(t)\bar{c}'(t) = A(t)Y(t)\bar{c}(t) + Y(t)\bar{c}'(t) \quad (4.20)$$

Подставим $\bar{y}(t) = Y(t)\bar{c}(t)$ и (4.20) в $\bar{y}' = A\bar{y} + \bar{f}(t) \Rightarrow$

$$Y(t)c'(t) = \bar{f}(t).$$

В силу невырожд-ти ФСР $\Rightarrow$ $\bar{c}'(t) = Y^{-1}(t)\bar{f}(t)$, затем

$$\bar{c}(t) = \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\sigma)\bar{f}(\sigma)\, d\sigma$$

Подставим в $\bar{y}(t) = Y(t)\bar{c}(t) \Rightarrow \bar{y}(t) = Y(t)\bar{c}(t) = Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\sigma)\bar{f}(\sigma)\, d\sigma =$
$= \int_{t_0}^{t} Z(t, \sigma)\bar{f}(\sigma)\, d\sigma.$ ■

БИЛЕТ 22

Теорема о построении ФСР системы ОДУ с пост. коэфф. в случае $\exists$ базиса из собств. вект. м-цы.

Теорема 30. О построении ФСР. (4.4.1)

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_n$ – ЛНЗ собств. вект. у A, отвеч. собств. знач. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Тогда в кач-ве ФСР $\bar{y}' = A\bar{y}$ можно взять:

(4.27) $\bar{y}_1 = \bar{h}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \bar{y}_n = \bar{h}_n e^{\lambda_n t}$ на $[a,b]$.

▶ 1) Ф-ий всего n.

2) $(\bar{y}_k)' = (\bar{h}_k e^{\lambda_k t})' = \lambda_k \bar{h}_k e^{\lambda_k t} = (A\bar{h}_k)e^{\lambda_k t} = A(\bar{h}_k e^{\lambda_k t}) = A\bar{y}_k$.

3) $\forall [c,d] : [a,b] \subseteq [c,d]$ и $t=0$, $0 \in [c,d]$.

(4.27) – реш. $\bar{y}'(t) = A\bar{y}(t)$ на $[c,d]$. В т. $t=0$

$$W[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n](0) = \det(\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_n) \neq 0$$

По теореме 25 $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ ЛНЗ на $[a,b]$ $\Rightarrow$ данная сист. образует ФСР $\bar{y}' = A\bar{y}$. ■

БИЛЕТ 23

Теорема о построении ФСР сист. ОДУ с пост. коэфф. в случае, когда нет базиса из собств. вект. матр. сист.

Теорема 31 (4.4.2)

Пусть в $\bar{y}' = A\bar{y}$, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и жорд. базис A состоит из цепочек векторов вида: $\bar{h}^1_{j1}, \dots, \bar{h}^{p_{jl}}_{jl}$, где $j = \overline{1, s_l}$, $\sum\limits_{j=1}^{s_l} p_{jl} = m_l$, $\bar{h}^1_{jl}$ – собств. вект., а $\bar{h}^k_{jl}$ $(k = \overline{2, p_{jl}})$ – корневые, присоед. к $\bar{h}^1_{jl}$, отвеч. собст. зн. λ_l кратность m_l $(l = \overline{1,q})$, $\sum^{q} m_l = n$. Тогда в качестве ФСР $\bar{y}' = A\bar{y}$ можно взять:

$$\bar{y}^1_{jl}(t) = \bar{h}^1_{jl} e^{\lambda_l t}$$

$$\bar{y}^2_{jl}(t) = [t\bar{h}^1_{jl} + \bar{h}^2_{jl}] e^{\lambda_l t}$$

$$\vdots$$

$$\bar{y}^k_{jl}(t) = \left[\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\bar{h}^1_{jl} + \dots + t\bar{h}^{k-1}_{jl} + \bar{h}^k_{jl}\right] e^{\lambda_l t}$$

$$\vdots$$

$$\bar{y}^{p_{jl}}_{jl}(t) = \left[\frac{t^{p_{jl}-1}}{(p_{jl}-1)!}\bar{h}^1_{jl} + \dots + \bar{h}^{p_{jl}}_{jl}\right] e^{\lambda_l t}$$

▶ 1) ф-ий ровно n

2) $$(\bar{y}^k_{jl}(t))' = e^{\lambda_l t}\left[\lambda_l \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\bar{h}^1_{jl} + \lambda_l \frac{t^{k-2}}{(k-2)!}\bar{h}^2_{jl} + \dots + \lambda_l \bar{h}^k_{jl} + \frac{t^{k-2}}{(k-2)!}\bar{h}^1_{jl} + \dots + \bar{h}^{k-1}_{jl}\right] \ominus$$

$$\ominus\ A\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\bar{h}^1_{jl} + \dots + \bar{h}^k_{jl} e^{\lambda_l t}\right) = A\bar{y}^k_{jl}(t).$$

3) $\exists\ [c,d] : [a,b] \subseteq [c,d]$, $t = 0 \in [c,d]$. Опр. Вронского по постр. сист. при $t=0$ совп. с опр. матр. стб. которой явл. вектор из жорд. баз $\Rightarrow \neq 0$. По теор. об альтерн. $W \neq 0$ $\forall t \in [a,b] \Rightarrow W \neq 0$ $\forall t \in [a,b] \Rightarrow$ по постр. ф-ии – ЛНЗ на $[a,b] \Rightarrow$ образуют ФСР. ■

БИЛЕТ 24

Теорема о непр. зависимости реш. ЗК от прав. части и нач. данных. Теорема сравнения.

Опр 45 Р ЗК для ОДУ 1-го порядка:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (1.1) \\ y(t_0) = y_0 & (1.2) \end{cases} \qquad t \in [t_0 - T; t_0 + T].$$

$\exists$ $f(t,y) \in C(Q)$, $Q = \{(t,y) : |t - t_0| \le T,\ A \le y \le B\}$.

Решением ЗК (1.2) и (1.1) на $[t_0 - T; t_0 + T]$ наз. ф-ия $y(t)$:

$y(t) \in C^1[t_0 - T; t_0 + T]$, $A \le y(t) \le B$ на $t \in [t_0 - T; T + t_0]$, $y(t)$ удо-т (1.1) и (1.2).

$f(t,y)$ – правая часть ДУ.

$y(t_0) = y_0$ – начальное данное.

Теорема 32. О непр. завис. от исх. данных.

$\exists$ ф-ии $f_1(t,y)$ и $f_2(t,y) \in C(Q)$ и $f_1(t,y)$ удовл. усл. Липшица по y на Q с конст. $L > 0$:

$$|f_1(t,y) - f_1(t,\tilde{y})| \le L|y - \tilde{y}|, \quad \forall (t,y), (t,\tilde{y}) \in Q.$$

Тогда если $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – реш. ЗК:

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t)) \\ y_1(t_0) = y_{01} \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2'(t) = f_2(t, y_2(t)) \\ y_2(t_0) = y_{02} \end{cases}$$

то:
$$\max_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} |y_1(t) - y_2(t)| \le \Big(|y_{01} - y_{02}| + T \max_{(t,y) \in Q} |f_1(t,y) - f_2(t,y)|\Big) e^{LT}.$$

▶ По лемме 2 об экв. реш ЗК инт-му ур-ию $\Rightarrow$

$$y_1(t) = y_{01} + \int_{t_0}^{t} f_1(\sigma, y_1(\sigma))\, d\sigma, \quad t \in [t_0 - T; t_0 + T].$$

$$y_2(t) = y_{02} + \int_{t_0}^{t} f_2(\sigma, y_2(\sigma))\, d\sigma, \quad t \in [t_0 - T; t_0 + T].$$

Вычт. из 1-го 2-ое $\Rightarrow$ $|y_1(t) - y_2(t)| \le |y_{01} - y_{02}| + \left| \int_{t_0}^{t} (f_1(\sigma, y_1(\sigma)) - f_2(\sigma, y_2(\sigma)))\, d\sigma \right| \le$

$\le |y_{01} - y_{02}| + \left| \int_{t_0}^{t} |f_1(\sigma, y_1(\sigma)) - f_1(\sigma, y_2(\sigma))|\, d\sigma \right| + \left| \int_{t_0}^{t} |f_1(\sigma, y_2(\sigma)) - f_2(\sigma, y(\sigma))| \right| \le$

$\le \Big(|y_{01} + y_{02}| + T \max_{(t,y) \in Q} |f_1(t,y) - f_2(t,y)|\Big) + L \left| \int_{t_0}^{t} |y_1(\sigma) - y_2(\sigma)|\, d\sigma \right|.$

По лемме 1 (Гронуолла - Беллмана) $\Rightarrow$ для $|y_1(t) - y_2(t)|$ $\Rightarrow$

$$|y_1(t) - y_2(t)| \le \Big(|y_{01} - y_{02}| + T \max_{(t,y) \in Q} |f_1(t,y) - f_2(t,y)|\Big) e^{LT} \;\blacksquare$$

Р $Q_+ = \{(t,y) : t_0 \le t \le t_0 + T,\ A \le y \le B\}$.

Лемма 3. Пусть $f(t,y),\ f'_y(t,y)\in C(Q_+)$, $y(t)$ - реш. $y'(t)=f(t,y)$ в Q_+. Тогда: $f(t,y_1)-f(t,y_2)=(y_1-y_2)\int_0^1 f'_y(t,y_2+\Theta(y_1-y_2))\,d\Theta$ для $\forall\ (t,y_1)$ и $(t,y_2)\in Q_+$, $\Theta\in[0,1]$.

▶ $(y_1-y_2)\int_0^1 f'_y(t,y_2+\Theta(y_1-y_2))\,d\Theta = \int_0^1 f'_y(t,y_2+\Theta(y_1-y_2))\,d(\Theta(y_1-y_2)+y_2) =$
$= f(t,y_2+\Theta(y_1-y_2))\Big|_0^1 = f(t,y_1)-f(t,y_2)$. ■

Лемма 4. Пусть $p(t), q(t)\in C[a,b]$, $t_0\in[a,b]$. Тогда общ. реш. ур-я $v'=pv+q$ имеет вид: $v=c\exp\left\{\int_{t_0}^t p(\sigma)d\sigma\right\}+\int_{t_0}^t q(\sigma)\exp\left\{\int_\sigma^t p(\xi)d\xi\right\}d\sigma$

▶ $v'-pv=q \ \Big|\cdot\exp\left\{-\int_{t_0}^t p(\sigma)d\sigma\right\}$.

$v'\exp\left\{-\int_{t_0}^t p(\sigma)d\sigma\right\}-pv\left\{-\int_{t_0}^t p(\sigma)d\sigma\right\}=q\exp\left\{-\int_{t_0}^t p(\sigma)d\sigma\right\}$.

$v\exp\left\{-\int_{t_0}^t p(\sigma)d\sigma\right\}=\int_{t_0}^t q(\sigma)\exp\left\{-\int_{t_0}^t p(\xi)d\xi\right\}d\sigma+C$.

$v=c\cdot\exp\left\{\int_{t_0}^t p(\sigma)d\sigma\right\}+\int_{t_0}^t q(\xi)\exp\left\{\int_\sigma^t p(\xi)d\xi\right\}d\xi$ ■

Теорема 33. Теорема сравнения.

Пусть ф-ии $f_1(t,y), f_2(t,y), (f_1)'_y\in C(Q_+)$, причем $f_1(t,y)\ge f_2(t,y)$ $\forall\,(t,y)\in Q_+$ и $y_{01}\ge y_{02}$. Тогда, если $y_1(t)$ и $y_2(t)$ на $[t_0,t_0+T]$ явл. реш-ями

$$\begin{cases} y_1'(t)=f_1(t,y_1(t))\\ y_1(t_0)=y_{01}\end{cases},\qquad \begin{cases} y_2'(t)=f_2(t,y_2(t))\\ y_2(t_0)=y_{02}\end{cases}$$

то: $y_1(t)\ge y_2(t)$, $\forall t\in[t,t_0+T]$.

▶ Т.к. $y_1(t)$ и $y_2(t)$ - реш. на $[t_0,t_0+T]$ $\Rightarrow$ они $\in C[t_0,t_0+T]$, $A\le y_i(t)\le B$

и $y_1'(t)-y_2'(t)=f_1(t,y_1(t))-f_2(t,y_2(t))=\underbrace{f_1(t,y_1(t))-f_1(t,y_2(t))}_{\text{лемма 3}}+f_1(t,y_2(t))-$
$-f_2(t,y_2(t))=\{\text{по лемме 3}\}=(y_1-y_2)\int_0^1 f_1(t,y_2+\Theta(y_1-y_2))'_y\,d\Theta+f_1(t,y_2)-f_2(t,y_2)=$
$=\{\text{Пусть } v(t)=y_1(t)-y_2(t),\ p(t)=\int_0^1 f_1(t,y_2(t)+\Theta(y_1-y_2))d\Theta,\ q(t)=f_1(t,y_2)-f_2(t,y_2)\}=$

$$\begin{cases} = v'(t)=p(t)v(t)+q(t) \quad t\in[t_0,t_0+T].\\ v(t_0)=y_{01}-y_{02}\end{cases} \Rightarrow \text{по лемме 4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow v(t)=\underbrace{(y_{01}-y_{02})}_{\ge0}\underbrace{\exp\left\{\int_{t_0}^t p(t)d\Theta\right\}}_{>0}+\int_{t_0}^t\underbrace{(f_1(\sigma,y_2)-f_2(\sigma,y_2))}_{\ge0}\underbrace{\exp\left\{\int_\sigma^t p(\xi)d\xi\right\}}_{>0}d\sigma$

$\Rightarrow v=y_1-y_2\ge0$, $t\in[t_0,t_0+T]$ ■

БИЛЕТ 25

Теорема о непр. завис. реш. ЗК от парам. в нач-м усл-ии и правой части.

$$Q_\mu = \{(t,y,\mu): \ |t-t_0| \le T,\ A \le y \le B,\ \mu_1 \le \mu \le \mu_2\}$$

$\operatorname{dom} f(t,y,\mu) = Q_\mu$, $\operatorname{dom} y_0(\mu) = [\mu_1, \mu_2]$.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), \mu), & t \in [t_0 - T, t_0 + T] \quad (1.7) \\ y(t_0) = y_0(\mu) & \quad (1.8) \end{cases}$$

, $y(t,\mu)$ – реш. ЗК

Теорем 34. О непр. зав. реш. ЗК от парам.

Пусть ф-ия $f(t,y,\mu) \in C(Q_\mu)$ и $f(t,y,\mu)$ – удовл. в Q_μ усл. Липшица по y

$$|f(t,y_1,\mu) - f(t,y_2,\mu)| \le L|y_1 - y_2| \quad \forall (t,y_1,\mu), (t,y_2,\mu) \in Q_\mu$$

ф-ия $y_0(\mu) \in C[\mu_1, \mu_2]$.

Тогда, если $y(t,\mu)$ – реш. ЗК (1.7) и (1.8) на $[t_0 - T, t_0 + T]$ для $\forall \mu \in [\mu_1, \mu_2]$, то ф-ия $y(t,y)$ непр. по μ при $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$.

▸ Пусть μ_0 и $\mu_0 + \Delta\mu$ – $\forall$ точки $\in [\mu_1, \mu_2]$. $\exists$ реш. ЗК:

$$y_1(t) = y(t, \mu_0) \qquad y_2(t) = y(t, \mu_0 + \Delta\mu)$$

$$f_1(t,y) = f(t,y,\mu_0) \qquad f_2(t,y) = f(t,y,\mu_0 + \Delta\mu)$$

$$y_{01} = y_0(\mu_0) \qquad y_{02} = y_0(\mu_0 + \Delta\mu)$$

Для ф-ций $y_1(t)$ и $y_2(t)$ вып. теорема 32. $\Rightarrow$

$$\max_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} |y(t,\mu_0) - y(t,\mu_0 + \Delta\mu)| = \max|y_1(t) - y_2(t)| \le$$

$$\le \left(|y_{01} - y_{02}| + T \max_{(t,y) \in Q} |f_1(t,y) - f_2(t,y)|\right) e^{LT} = \Big(|y_0(\mu_0) - y_0(\mu_0 + \Delta\mu)| +$$

$$+ T \max|f(t,y,\mu_0) - f(t,y,\mu_0 + \Delta t)|\Big) e^{LT} \quad (1.9) \quad (Q = \{(t,y): |t-t_0| \le T, A \le y \le B\})$$

Покажем, что из (1.9) $\Rightarrow$ непр-ть ф-ии $y(t,\mu)$ в т. μ_0.

Пусть $\forall \varepsilon > 0$ Покажем $\exists \delta(\varepsilon): \forall |\Delta\mu| < \delta: \ |y(t,\mu_0 + \Delta\mu) - y(t,\mu_0)| < \varepsilon$ $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$.

Т.к. $y_0(\mu)$ – непр. на $[\mu_1, \mu_2] \Rightarrow$ равн. непр. на $[\mu_1, \mu_2] \Rightarrow \exists \delta_1(\varepsilon)$:

$$(1.11) \qquad |y_0(\mu_0 + \Delta\mu) - y_0(\mu_0)| \le \frac{\varepsilon}{2e^{LT}}, \quad |\Delta\mu| \le \delta_1(\varepsilon).$$

Т.к. $f(t,y,\mu)$ непр на $Q_\mu \Rightarrow$ равн. непр. на $Q_\mu \Rightarrow \delta_2(\varepsilon)$:

$$(1.12) \qquad |f(t,y,\mu_0 + \Delta\mu) - f(t,y,\mu_0)| \le \frac{\varepsilon}{2Te^{LT}} \quad |\Delta\mu| \le \delta_2(\varepsilon).$$

Из (1.9), (1.11) и (1.12) $\Rightarrow$ $|\Delta\mu| \leq \delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$

справедливо: $|y(t, \mu_0 + \Delta\mu) - y(t, y_0)| \leq \varepsilon$ $\Rightarrow$ непр-ть $y(t, \mu)$ по μ

$\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$.

БИЛЕТ 26

Теорема о дифф-ти по параметру реш. ЗК.

$Q_\mu = \{(t,y,\mu): |t-t_0| \le T,\ A \le y \le B,\ \mu_1 \le \mu \le \mu_2\}$

$\mathrm{dom}\, f(t,y,\mu) = Q_\mu$, $\mathrm{dom}\, y_0(\mu) = [\mu_1, \mu_2]$.

$$\begin{aligned} &(1.7) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), \mu) \\ y(t_0) = y_0(\mu) \end{cases}, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T]. \\ &(1.8) \end{aligned}$$

Теорема 35. О дифф-ти по параметру.

Пусть ф-ия $f(t,y,\mu)$, f'_y, $f'_\mu \in C(Q_\mu)$ и ф-ия $y_0(\mu) \in C^1[\mu_1, \mu_2]$. Тогда, если $y(t,\mu)$ – реш. ЗК (1.7), (1.8) на $[t_0-T, t_0+T]$ для $\forall \mu \in [\mu_1, \mu_2]$, то ф-ия $y(t,\mu)$ – дифф-ма по μ на $[\mu_1, \mu_2]$.

▶ Рассм. реш. ЗК: $y(t,\mu)$ и $y(t,\mu+\Delta\mu)$, $\mu, \mu+\Delta\mu \in [\mu_1, \mu_2]$.

Пусть $v(t,\mu,\Delta\mu) = \dfrac{y(t,\mu+\Delta\mu) - y(t,\mu)}{\Delta\mu}$, $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$.

Т.к. ф-ии $y(t,\mu+\Delta\mu)$ и $y(t,\mu)$ – реш ур-ие (1.7) $\Rightarrow$

$$v'(t,\mu,\Delta\mu) = \frac{f(t, y(t,\mu+\Delta\mu), \mu+\Delta\mu) - f(t, y(t,\mu), \mu)}{\Delta\mu} =$$

$$= \frac{f(t, y(t,\mu+\Delta\mu), \mu+\Delta\mu) - f(t, y(t,\mu), \mu+\Delta\mu)}{\Delta\mu} + \underbrace{\frac{f(t, y(t,\mu), \mu+\Delta\mu) - f(t, y(t,\mu), \mu)}{\Delta\mu}}_{q(t,\mu,\Delta\mu)}.$$

По лемме 3 (Ф-ла конечных приращ.)

$$\frac{f(t, y(t,\mu+\Delta\mu), \mu+\Delta\mu) - f(t, y(t,\mu), \mu+\Delta\mu)}{\Delta\mu} = \underbrace{\frac{y(t,\mu+\Delta\mu) - y(t,\mu)}{\Delta\mu}}_{v(t,\mu,\Delta\mu)} \cdot \underbrace{\int_0^1 f'_y\big(t, y(t,\mu) + \theta(y(t,\mu+\Delta\mu) - y(t,\mu)), \mu+\Delta\mu\big)\, d\theta}_{p(t,\mu,\Delta\mu)}.$$

$$v' = \frac{f(t, y(t,\mu+\Delta\mu), \mu+\Delta\mu) - f(t, y(t,\mu), \mu)}{\Delta\mu} = v(t,\mu,\Delta\mu)\, p(t,\mu,\Delta\mu) + q(t,\mu,\Delta\mu).$$

с нач. усл-м $v(t_0,\mu,\Delta\mu) = \dfrac{y_0(\mu+\Delta\mu) + y_0(\mu)}{\Delta\mu}$.

По лемме 4: $v(t,\mu,\Delta\mu) = v(t_0,\mu,\Delta\mu) \exp\left\{\int_{t_0}^t p(\sigma,\mu,\Delta\mu)\, d\sigma\right\} + \int_{t_0}^t q(\sigma,\mu,\Delta\mu) \exp\left\{\int_\sigma^t p(\xi)\, d\xi\right\} d\sigma$, $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$

Для док-ва $\exists\ y'_\mu(t,\mu)$ над. док-ть $\exists \lim\limits_{\Delta\mu\to 0} v(t,\mu,\Delta\mu)$.

$$\lim_{\Delta\mu\to 0} v(t_0,\mu,\Delta\mu) = \lim_{\Delta\mu\to 0} \frac{y_0(\mu+\Delta\mu)-y_0(\mu)}{\Delta\mu} = y_0{}'_\mu(\mu), \ (\text{т.к. } y_0(\mu)\in C^1[\mu_1,\mu_2])$$

$$\lim_{\Delta\mu\to 0} p(t,\mu,\Delta\mu) = f'_y(t,y(t,\mu),\mu), \text{ т.к. можем занести } \lim_{\Delta\mu\to 0} \text{ под инт.}$$

из-за непр-ти f'_y и сх-ти f'_y
$$f'_y\big(t, y(t,\mu)+\theta(y(t,\mu+\Delta\mu)-y(t,\mu)), \mu+\Delta\mu\big) \underset{\Delta\mu\to 0}{\to} f'_y(t,y(t,\mu),\mu)$$

$$\int_0^1 f'_y\,d\theta = f'_y.$$

$$\lim_{\Delta\mu\to 0} q(t,\mu,\Delta\mu) = f'_\mu(t,y(t,\mu),\mu), \text{ т.к. } f'_\mu\in C(Q).$$

$$\Rightarrow \quad y'_\mu(t,\mu) = \lim_{\Delta\mu\to 0} v(t,\mu,\Delta\mu). \ \blacksquare$$

БИЛЕТ 27, 28

Основные понятия теории устойч-ти по Ляпунову. Теорема об АУ, У, НУ устойч-ти нулевого реш. лин. однород. сист. ОДУ с пост. коэфф.

$$\bar{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))^T, \quad \bar{f}(t, \bar{y}(t)) = (f_1(t, \bar{y}), \ldots, f_n(t, \bar{y}))^T, \quad \bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{cases} \bar{y}'_t = \bar{f}(t, \bar{y}(t)) & (2.1) \quad t \in [t_0; +\infty),\ f_i(t, \bar{y}), f'_{y_i}(t, \bar{y}) \in C[t_0, +\infty) \\ \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0 & (2.2) \quad \bar{y} \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Без потери общности считаем $t_0 = 0$. По теореме 6 и 7 о $\exists!$ реш. ЗК для $\forall$ нач. данных $\bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ система (2,1) и (2,2) имеет на нек-ом $[t_0, T]$! реш. $\bar{y}(t; \bar{y}_0)$. $\|\bar{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$

Опр 46. Реш. $\bar{y}(t, \bar{y}_0)$ ЗК (2.1), (2.2) наз. *устойчивым по Ляпунову*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon, \bar{y}_0) > 0 : \forall \tilde{\bar{y}}_0 : \|\tilde{\bar{y}}_0 - \bar{y}_0\| < \delta \Rightarrow \|\bar{y}(t, \tilde{\bar{y}}_0) - \bar{y}(t, \bar{y}_0)\| < \varepsilon,\ \forall t \in [t_0, +\infty)$

$\bar{y}(t, \tilde{\bar{y}}_0)$ – реш. (2.1) с нач. усл. $\bar{y}(t_0) = \tilde{\bar{y}}_0$.

Опр 47. Реш. $\bar{y}(t, \bar{y}_0)$ ЗК (2.1), (2.2) наз. *асимптотически устойчивым*, если:

1) $\bar{y}(t, \bar{y}_0)$ – устойчиво по Ляпунову.
2) $\exists\ \delta_0 > 0 : \forall \tilde{\bar{y}}_0 : \|\tilde{\bar{y}}_0 - \bar{y}_0\| < \delta_0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{t \to +\infty} \|\bar{y}(t; \tilde{\bar{y}}_0) - \bar{y}(t, \bar{y}_0)\| = 0.$

Лемма 5. $\exists\ A = \{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{n}$, $a_{ij}(t) \in C[t_0, +\infty)$. Тогда нулевое реш. $\bar{y}' = A\bar{y}$ яв.
0) НУ, если $\exists$ неогр. реш.
1) У, если все реш. огр. на $[t_0, +\infty)$.
2) АУ, если все реш. этой сист. вып.: $\|\bar{y}(t)\| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$.

▶ Нул. реш. – реш. ЗК: $\begin{cases} \bar{y}' = A\bar{y} \\ \bar{y}(t_0) = \bar{\theta} \end{cases}$ обозн. $\bar{y}(t, \bar{\theta}) = \bar{\theta}$, $t \geq t_0$

реш. $\begin{cases} \bar{y}' = A\bar{y} \\ \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0 \end{cases}$ обозн. $\bar{y}(t, \bar{y}_0) = Y(t) \cdot Y^{-1}(t_0) \cdot \bar{y}_0 = Z(t, t_0)\bar{y}_0$

т.к. Теорема 27 $\Rightarrow \bar{y}_{oo}(t) = Y(t)\bar{c} \Rightarrow \{\bar{y}_{oo}(t_0) = \bar{y}_0\} \Rightarrow \bar{c} = Y^{-1}(t_0) \cdot \bar{y}_0$.
$Y(t)$ – какая-либо фунд. м. $Y(t) = (\bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_n(t))$ для $\bar{y}' = A\bar{y}$.
Очевидно: $|y_k(t)| \leq \sqrt{|y_1^2| + \ldots + |y_n^2|} \leq \sqrt{n}\,|y_{k_0}|$, $k = \overline{1,n}$, y_{k_0} – max по $|\cdot|$ эл. $\bar{y}$.
$|y_{km}| \leq \sqrt{\sum_{k,m=1}^{n} |y_{ij}|^2} \leq n\,|y_{k_0 m_0}|$, $k, m = \overline{1,n}$. $y_{k_0 m_0}$ – max по $|\cdot|$ эл-т Y.
1) Стб $Y(t)$ яв. реш. $\bar{y}' = A\bar{y} \Rightarrow \|Y(t)\| \leq n\,|y_{k_0 m_0}(t)| \leq n\,\|\bar{y}_{m_0}\| \leq C$,
т.к. все реш. огр. на $[t_0, +\infty)$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \dfrac{\varepsilon}{2 \cdot C \cdot \|Y^{-1}(t_0)\|} : \forall \bar{y}_0\ \ \|\bar{y}_0 - \bar{\theta}\| < \delta \Rightarrow \|\bar{y}(t, \bar{y}_0) - \bar{\theta}\| = \|Y(t) Y^{-1}(t_0) \bar{y}_0\| \leq$
$\leq \|Y(t)\| \cdot \|Y^{-1}(t_0)\| \cdot \|\bar{y}_0\| < \|Y(t)\| \cdot \|Y^{-1}(t_0)\| \cdot \delta \leq C \cdot \|Y^{-1}(t_0)\| \cdot \delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Т.о. $\bar{u}(t, \theta) \equiv \theta$ У

2) Т.к. реш. $\bar{y}' = A\bar{y}$ вып. $|\bar{y}| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \{$т.к. $\|\bar{y}\|$ - непр.$\} \Rightarrow \bar{y}(t)$ - огр. на $[t_0, +\infty)$
$\Rightarrow \{1\} \Rightarrow \bar{y}(t, \Theta) \equiv 0$ (У).

Кроме того, $\|Y(t)\| \le n \cdot \|\bar{y}_{m_0}\| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \Rightarrow \|\bar{y}(t, y_0) - \bar{y}(t, \Theta)\| =$
$= \|Y(t) Y^{-1}(t_0) \bar{y}_0\| \le \|Y(t)\| \cdot \underbrace{\|Y^{-1}(t_0)\| \cdot \|\bar{y}_0\|}_{const} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \Rightarrow \bar{y}(t, \Theta) \equiv \Theta$ (АУ).

3) $\exists\ \bar{y}^*(t)$ - неогр. реш. $\bar{y}' = A\bar{y}$. $\exists\ \ell^* = \|\bar{y}^*(t_0)\|$.
Очевидно $\forall \delta > 0\ \exists t^* > t_0 : \|\bar{y}^*(t^*)\| > \frac{2\ell^*}{\delta}$
$\exists\ \varepsilon = 1 : \forall \delta > 0\ \exists\ \bar{y}(t) = \frac{\delta}{2\ell^*} \cdot \bar{y}^*(t) : \|\bar{y}(t_0) - \Theta\| = \frac{\delta}{2\ell^*} \|y^*(t_0)\| = \frac{\delta}{2} < \delta.$
$\exists t^* : \|\bar{y}(t^*) - \Theta\| = \|\frac{\delta}{2\ell^*} \bar{y}^*(t^*)\| = \frac{\delta}{2\ell^*} \|y^*(t^*)\| > 1 \Rightarrow \bar{y}(t, \Theta) \equiv \Theta$ (НУ). ■

Теорема 36.

$\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_n$ - с.зн. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (могут повт.) Тогда нул.реш. $\bar{y}' = A\bar{y}$ яв. на $[t_0; +\infty)$
1) (АУ), если $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$, $\forall k = \overline{1,n}$.
2) (У), если $\mathrm{Re}\,\lambda_k \le 0$, и есть с.зн. $\mathrm{R}\lambda_m = 0$ и геом. кр-ть = алг. кр-ти
$k = \overline{1,n}$.
3) (НУ), если: либо:
  а) $\exists m : \mathrm{R}\lambda_m > 0$.
  б) $\mathrm{Re}\,\lambda_k \le 0\ \forall k = \overline{1,n}$, $\exists\ \mathrm{Re}\lambda_m = 0$ и алг. кр. > геом. кр-ти.

▶ Общее реш. $\bar{y}' = A\bar{y}$ имеет вид: $\bar{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \bar{g}_k(t) e^{\lambda_k t}$, где
$\bar{g}_k(t) = \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \bar{h}_k^1 + \ldots + t\bar{h}_k^{\ell-1} + \bar{h}_k^{\ell}$ (h_k^1 - собств. вект., отв. λ_k, $\ell \ge 1$, h^p - корнев. присоед. и $\bar{h}_k^1$, $p = \overline{2,\ell}$), (Теорема 31).
1) Если $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0 \Rightarrow \|\bar{g}_k(t) e^{\lambda_k t}\| \to 0 \Rightarrow \{$Лемма 5$\} \Rightarrow$ нул реш. (АУ) (все реш $\to 0$)
2) Слаг. разб. на 2 группы:
- с множ. $e^{\lambda_{k_i} t}$, $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$, т.е. не только огр, но и $\xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ по $\|\cdot\|$.
- либо вида $\bar{h}_{k_j} e^{i\beta_{k_j} t} = \bar{h}_{k_j}(\cos\beta_{k_j} t + i\sin\beta_{k_j} t)$ - огр., где $\bar{h}_{k_j}$ - с.в. огр. ф-ии $\Rightarrow$

$\{$по лемме 5$\} \Rightarrow$ нул реш (У).
Д-м, что не АУ: $\sphericalangle$ ф-ию $\bar{h}_{k_j}(\cos\beta_{k_j} t + i\sin\beta_{k_j} t)$:
- $\exists\ t_m = \frac{2\pi m}{\beta_{k_j}}$. Тогда $\bar{h}_{k_j}(\cos\beta_{k_j} t_m + i\sin\beta_{k_j} t_m) = \bar{h}_{k_j} \xrightarrow[m\to\infty]{} \bar{h}_{k_j}$
- $\exists\ t_m = \frac{\pi + 2\pi m}{\beta_{k_j}}$. Тогда — // — $= -\bar{h}_{k_j} \xrightarrow[m\to\infty]{} -\bar{h}_{k_j}$. Т.е. $\nexists \lim\limits_{t\to\infty}(\dots)$. $\Rightarrow$ АУ нет.

3) а) $\exists m : \mathrm{R}\lambda_m > 0$. $\exists$ в $\bar{y}(t)$ все $c_k > 0$, $k \ne m$, $c_m = 1 \Rightarrow$ реш содержит
слаг. $\bar{g}_m(t) e^{\lambda_m t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty \Rightarrow \exists$ неогр. реш. $\Rightarrow \{$лемма 5$\} \Rightarrow$ нул. реш (НУ).

б) $\exists m : \mathrm{R}\lambda_m = 0$, но геом кр < алг. кр. $\Rightarrow \exists$ реш. вида $\underbrace{\bar{g}_m(t)}_{\text{многочлен степ} \ge 1} \underbrace{e^{\lambda_m t}}_{\text{огр}}$ - неогр $\Rightarrow$
$\Rightarrow \{$Лемма 5$\} \Rightarrow$ нул реш (НУ) ■

БИЛЕТ 29

Теорема об исследовании устойчив. реш. сист. по первому приближ. (формулировка). Примеры.

(2.11) $\begin{cases} \bar{y}' = \bar{f}(\bar{y}(t)) \\ \bar{y}(\bar{0}) = \bar{\theta} \end{cases}$, $\bar{f}(\bar{y}) = (f_1(\bar{y}), \ldots, f_n(\bar{y}))$. $\bar{f}(\bar{\theta}) = \bar{\theta} \Rightarrow \exists!\ \bar{y}(t) = \bar{\theta}$.

! $\bar{f}$ не зависит от t — автономная сист.

Это реш. иссл. на уст.

Теорема 37. Первый метод Ляпунова.

$\rceil$ $\bar{f}(\bar{y}) \in C^2(\|\bar{y}\| < R)$. Рассм. $A = \{a_{km}\}_{k,m=1}^{n}$, $a_{km} = \left.\dfrac{\partial f_k(\bar{y})}{\partial y_m}\right|_{\bar{y}=\theta}$.

Тогда нулев. реш (2.11)

1) АУ, если $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, $k = \overline{1,n}$, $\forall \lambda_k$ — с.зн. м. A.

2) НУ, если $\exists k_0 : \operatorname{Re} \lambda_{k_0} > 0$.

Примеры: Исследовать на уст-вость нулевое реш.

1) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -y_1 + ay_2 + y_2^4 = f_1(y_1, y_2) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 - y_1^5 + y_2^3 = f_2(y_1, y_2) \end{cases} \Rightarrow A = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}\right|_{y_1=y_2=0} =$

$= \left.\begin{bmatrix} -1 & a + 4y_2^3 \\ 1 - 5y_1^4 & 3y_2^2 \end{bmatrix}\right|_0 = \lambda^2 + \lambda - a = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$

1) $a \in (-\infty; -\frac{1}{4}) \Rightarrow D \le 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \lambda_1 \lambda_2 = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ АУ

2) $a \in (-\frac{1}{4}; 0) \Rightarrow \lambda_{1,2} < 0 \Rightarrow$ АУ

3) $a = 0 \Rightarrow \exists \lambda = 0 \Rightarrow$ теорема 37 не применима.

4) $a > 0 \Rightarrow \sqrt{1+4a} > 1 \Rightarrow \exists \lambda > 0 \Rightarrow$ НУ.

БИЛЕТ 30

Исследование устойчивости реш. системы на основе ф-ий Ляпунова
Теорема об устойчивости и асимптотической устойчивости.

Опр 48. Непр-ая на $\Omega=\{\|\bar{y}\|\le r\}$ ф-ия $V(\bar{y}): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ наз. положительно опр., если

1) $V(\bar{y}) \ge 0,\ \forall \bar{y}\in\Omega$.

2) $V(\bar{y})=0 \iff \bar{y}=\bar{\Theta}$.

Лемма 6. $\exists\ V(\bar{y})$ – полож. опр. ф-ия в $\Omega=\{\|\bar{y}\|\le r\}$. Тогда

1) $\forall \varepsilon_1>0\ \exists \varepsilon_2>0: \|\bar{y}\|\ge\varepsilon_1 \Rightarrow V(\bar{y})\ge\varepsilon_2,\ \forall\bar{y}\in\Omega$.

2) $\forall \varepsilon_2>0\ \exists \varepsilon_1>0: V(\bar{y})\ge\varepsilon_2 \Rightarrow \|\bar{y}\|\ge\varepsilon_1,\ \forall\bar{y}\in\Omega$.

▶ 1) От. противн. $\exists\exists\varepsilon_1>0: \forall\varepsilon_2>0: \|\bar{y}\|\ge\varepsilon_1 \Rightarrow V(\bar{y})<\varepsilon_2,\ \forall\bar{y}\in\Omega$ $\leftarrow \varepsilon_{2k}\xrightarrow[k\to\infty]{}0$

$\exists \bar{y}_k: \|\bar{y}_k\|\ge\varepsilon_1,\ V(\bar{y}_k)<\varepsilon_{2k}$. $\varepsilon_1\le\|y_k\|\le r \Rightarrow$ {т.к. посл. $y_k\in$ замк. огр. мн-ву} $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\bar{y}_{km}: \|\bar{y}_{km}\|\xrightarrow[m\to\infty]{}\|y\|\ge\varepsilon_1 \Rightarrow$ т.к. $V(\bar{y})$ – непр $\Rightarrow V(\bar{y}_{km})\to V(\tilde{y})=0$

из опр 48 $\Rightarrow \tilde{y}=\Theta$, но $\tilde{y}\ne\Theta$ (!?).

2) От противного. $\exists\exists\varepsilon_2>0\ \forall\varepsilon_1>0: V(\bar{y})\ge\varepsilon_2 \Rightarrow \|\bar{y}\|<\varepsilon_1,\ \forall\bar{y}\in\Omega$.

$\leftarrow \varepsilon_{1k}\xrightarrow[k\to\infty]{}0 \Rightarrow \|\bar{y}_k\|\xrightarrow[k\to\infty]{}\bar{\Theta} \Rightarrow V(\bar{y}_k)\to V(\bar{\Theta})=\Theta$, но $V(\bar{y}_k)\ge\varepsilon_2>0$ (!?). ■

Опр 49. Рассм. $\bar{y}'=\bar{f}(t,\bar{y})$, $\frac{\partial f_k}{\partial y_m}(t,\bar{y})\in C\{t\in[t_0,+\infty),\bar{y}\in\mathbb{R}^n\}$ и непр-вно дифф. положит. опред. на $\Omega=\{\|y\|\le r\}$ ф-ию $V(\bar{y})$.

Производн. $V(\bar{y})$ в силу сист. $\bar{y}'=\bar{f}(t,\bar{y})$ наз.: $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(*)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial y_k}f_k(t,\bar{y})$.

(*) – произв. берется вдоль реш-ий системы $\bar{y}'=f(t,\bar{y})$.

или $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(*)}=\frac{dV(\bar{y}(t))}{dt}$, где $\bar{y}(t)$ – реш $\bar{y}'=f(t,\bar{y})$, т.е. $f_k(t,\bar{y})=\frac{dy_k}{dt}$.

Опр 50 Непр. дифф. и положит. опр. на $\Omega=\{\|\bar{y}\|\le r\}$ ф-ия $V(\bar{y})$ наз. ф-ей Ляпунова для $\bar{y}'=\bar{f}(t,\bar{y})$, если $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(*)}\le 0$, $\forall t\in[t_0,+\infty)$ $\forall\bar{y}\in\Omega$.

$$(2.19)\quad \begin{cases}\bar{y}'=\bar{f}(t,\bar{y})\\ \bar{y}(t_0)=\bar{\Theta}\end{cases}$$

$\bar{f}(t,\bar{y})=(f_1(t,\bar{y}),\dots,f_n(t,\bar{y}))^T$, $f_i\in C([0,+\infty)\times\Omega)$

При $t\ge t_0$: $\bar{f}(t,\Theta)=\Theta$ и $\exists!$ реш $\begin{cases}\bar{y}'=\bar{f}(t,\bar{y})\\ \bar{y}(t_0)=\bar{y}_0\end{cases}$, $\forall t\ge t_0$

при $\forall\bar{y}_0: \|\bar{y}_0\|\le\delta$.

Теорема 38. Ляпунова об устойчивости.
$\exists$ на мн-ве Ω $\exists$ ф-ия Ляпунова для (2.19). Тогда нулевое решен. $\bar{y}(t,\bar{0})=\bar{\Theta}$ сист. (2.19) – (У) по Ляпунову.

▶

(По лемме 6, если $V(\bar{y}(t))$ не огр., то и $\|\bar{y}(t)\|$ не огр-ет.
А $V(\bar{y}(t))$ - не огр., т.к. $\frac{dV}{dt}(\bar{y}(t)) \le 0$) - идея.

От противного. $\exists\, \varepsilon_1 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists \bar{y}_1 : \|\bar{y}_1 - \bar{\Theta}\| =$
$= \|\bar{y}_1\| < \delta$ (т.е. $\bar{y}(t,\bar{y}_1)$ - реш ЗК (2.19)), но $\exists t^* \ge t_0 : \|\bar{y}(t^*,\bar{y}_1)\| \ge \varepsilon_1$.
По лемме 6 из того, что $\|\bar{y}(t^*,\bar{y}_1)\| \ge \varepsilon_1 \Rightarrow \exists \varepsilon_2 : V(\bar{y}(t^*,\bar{y}_1)) \ge \varepsilon_2$.
Т.к. $V(\bar{y}) \in C(\Omega)$ и $V(\bar{\Theta}) = 0$, то $\forall \frac{\varepsilon_2}{2} > 0 \ \exists \delta_1 : \forall \bar{y} \ \|\bar{y} - \bar{\Theta}\| < \delta_1 \Rightarrow |V(\bar{y}) - V(\bar{\Theta})| < \frac{\varepsilon_2}{2}$
Выберем $\delta_2 = \min\{\delta, \delta_1\}$. Возьм. произв. нач. т. $\bar{y}_2 : \|\bar{y}_2\| < \delta_2 \Rightarrow V\|\bar{y}(t_0,\bar{y}_2)\| < \frac{\varepsilon_2}{2}$
а $V(\bar{y}(t^*,\bar{y}_1)) \ge \varepsilon_2 \Rightarrow V(\bar{y}(t^*,\bar{y}_1)) - V(\bar{y}(t_0,\bar{y}_1)) \ge \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2}{2} = \frac{\varepsilon_2}{2} > 0$

Но $\frac{dV}{dt}(\bar{y}(t)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\bar{y}(t))}{\partial y_j} \frac{dy_j(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\bar{y}(t))}{\partial y_j} f_j(t,\bar{y}(t)) \le 0$

ф-ия Ляпунова не возр-т на $[t_0, +\infty)$ (!?) ■

Теорема 39. Ляпунова об асимпт. устойчивости.

Пусть на Ω $\exists$ ф-ия Ляпунова $V(\bar{y})$ системы (2.19):
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\bar{y})}{\partial y_j} f_j(t,\bar{y}) \le -W(\bar{y}), \quad \forall \bar{y} \in \Omega, \ t \ge 0,$$
где $W(\bar{y})$ - положит. опр. ф-ия. Тогда нулевое реш (2.19) - АУ.

▶ По теореме 38 реш $\bar{y}(t,\bar{\Theta}) = \bar{\Theta}$ - У. Надо док-ть, что для $\bar{y}(t) = \bar{y}(t, \bar{y}_0)$
ЗК (2.19) вып. $\bar{y}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \bar{\Theta}$ ($\bar{y}_0$ нач. в опр-ии ну. решения).
Пусть $\bar{y}_1(t) = \bar{y}(t,\bar{y}_1)$ - реш. ЗК: $\begin{cases} \bar{y}' = \bar{f}(t,\bar{y}) \\ \bar{y}'(t_0) = \bar{y}_1 \end{cases}$. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \bar{y}_1 : \|\bar{y}_1\| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow \|\bar{y}_1(t)\| < \varepsilon, \ \forall t > t_0$, т.е. $\exists \delta > 0$: при $\|\bar{y}_1\| < \delta$, $\bar{y}_1(t) \in \Omega = \{\|\bar{y}\| \le r\} \ \forall t > t_0$
ф-ия Ляпунов - положит. опр $\Rightarrow V(\bar{y}(t,\bar{y}_1)) \ge 0$, $\forall t \ge t_0$ и т.к. $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(*)} \le 0$
$V(\bar{y}(t,\bar{y}))$ - монотонно убыв. Т.обр. $\exists \lim_{t\to\infty} V(\bar{y}(t,\bar{y}_1)) = \alpha \ge 0$.
Убедимся, что $\alpha = 0$. Пусть $\alpha > 0 \Rightarrow$ {Лемма 6} $\exists \alpha_1(\alpha) : \|\bar{y}(t)\| \ge \alpha_1 > 0$.
$\Rightarrow$ {Лемма 6} $\Rightarrow \exists \beta(\alpha_1) > 0 : W(\bar{y}_1(t)) \ge \beta \Rightarrow V(\bar{y}_1(t)) - V(\bar{y}_1(t_0)) \ge \int_{t_0}^{t} \beta \, d\tau =$
$= \beta t - \beta t_0 \Rightarrow V(\bar{y}(t,\bar{y}_1)) \le V(\bar{y}(t_0,\bar{y}_1)) + \beta t_0 - \beta t \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$
Но $V(\bar{y}) \ge 0$ при $\bar{y} \in \Omega$ (?!) $\Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow V(\bar{y}_1(t)) \to 0 \Rightarrow \|\bar{y}(t)\| \to 0 \Rightarrow$ нул. реш
АУ ■

БИЛЕТ 31

Исследования повед. реш. сист. в окрестности точек покоя. Классификацию точек покоя.

$\angle$ $\bar{y}' = \bar{f}(\bar{y})$ **(2.30)** – автоном. сист., $\bar{f}$: реш $\exists$ на $(-\infty;+\infty)$.

Опр 51 Точкой покоя (положением равновесия) (2.30) наз. её реш. специального вида: $\bar{y}(t) = \bar{y}_0 = const$.

$\bar{y}_0$ – точка покоя $\Leftrightarrow$ $f(\bar{y}_0) = \Theta$.

Опр 52 Точка покоя $\bar{y}(t) = \bar{y}_0$ сист. (2.30) наз. грубой, если матрица $\left\{ \frac{\partial f_k}{\partial y_m}\Big|_{\bar{y}=\bar{y}_0} \right\}_{k,m=1}^{n}$, имеет ровно <u>n различных</u> с-зн. с $\mathcal{R} \neq 0$.

<u>Грубые точки покоя можно исследовать на устойч. по теореме 37 (ф-ия м. Ляпунова)</u>, только <u>A нужно считать при $\bar{y} = \bar{y}_0$</u>.

<u>Поведение фазовых траекторий (2.30) в окр-ти грубой точки покоя</u> $\approx$ <u>совпадает с поведением фазовых траекторий системы $y' = A\bar{y}$ в ок-ти Θ</u> $A = \left\{ \frac{\partial f_k}{\partial y_l}\Big|_{\bar{y}=\bar{y}_0} \right\}$.

<u>Классификация точек покоя линейной системы.</u>

$\angle$ точки покоя лин. сист. на пл-ти $(n=2)$.

$\bar{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))$, $\bar{y}' = A\bar{y}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ **(2.31)**

λ_1, λ_2 – собств. зн., если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $h_1 = \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix}$, $h_2 \begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix}$.

① Узел $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0)$.

Общее реш: $\bar{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}$, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

1) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0 \Rightarrow$ нул. реш (У), нул. т. покоя наз. устойчивым узлом.

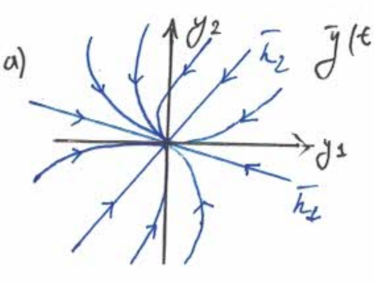
а) при $t \to +\infty$ $\bar{y}(t) \to \bar{0}$

$$\frac{\frac{dy_1}{dt}}{\frac{dy_2}{dt}} = \frac{dy_1}{dy_2} = \frac{C_1 h_{11}\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 h_{12}\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{C_1 h_{21}\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 h_{22}\lambda_2 e^{\lambda_2 t}} = \frac{C_1 h_{11}\lambda_1 + C_2 h_{12}\lambda_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}{C_1 h_{21}\lambda_1 + C_2 h_{22}\lambda_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{h_{11}}{h_{21}}$$

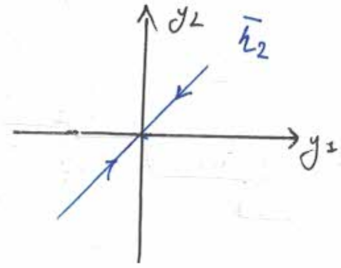
т.к. $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$ при $c_1 \neq 0$.

б) $\exists c_1 = 0$ (чтобы увидеть влияние более быстрой компоненты) $\bar{y}(t) = c_2 \begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}$

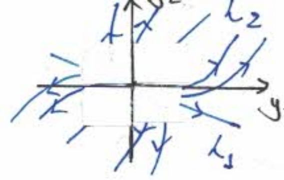
а)



б)



б) при $t\to-\infty$, $c_2\ne0$

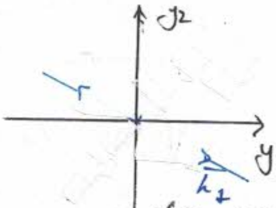


$t\to-\infty$, не стар... линии от О.

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{c_1h_{11}\lambda_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}+c_2h_{12}\lambda_2}{c_1h_{21}\lambda_1e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}+c_2h_{22}\lambda_2} \to \frac{h_{12}}{h_{22}}$$

$t\to-\infty$, т.к. $(\lambda_1-\lambda_2>0)$.

в) Пусть $C_2=0 \Rightarrow \bar y(t) = c_1\left(\frac{h_{11}}{h_{21}}\right)e^{\lambda_1 t}$.



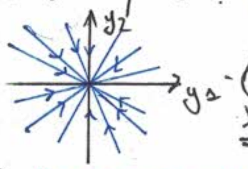
$t\to-\infty$

2) $0<\lambda_1<\lambda_2 \Rightarrow$ нул. реш (НУ), аналогично, но направление кривых в друг. сторону.

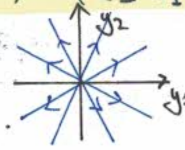
! Фазовые траект. входя в узел, касаются собств. в. с наим по мод. с.зн.

② Дикритический узел ($\lambda_1=\lambda_2\ne0$, $\dim\ker(A-\lambda_1E)=2$).
↳ т.е. 2 ЛНЗ собств. вект.

Общее реш.: $\bar y(t) = (c_1\bar h_1 + c_2\bar h_2)e^{\lambda t}$. $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$.



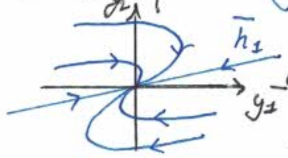
– (У) $\lambda<0$.



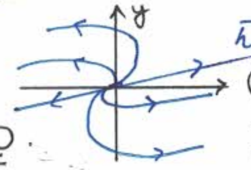
– (НУ) $\lambda>0$.

③ Вырожденный узел ($\lambda_1=\lambda_2\ne0$, $\dim\ker(A-\lambda_1E)=1$).

Общее реш: $\bar y(t) = c_1\bar h_1e^{\lambda t} + c_2(\bar p_1 + t\bar h_1)e^{\lambda t}$.



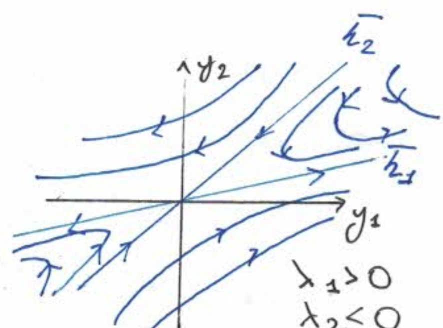
– (У) $\lambda<0$.



(НУ) $\lambda>0$.

④ Седло ($\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, $\lambda_2<0<\lambda_1$).

Всегда (НУ). Общ. реш. $\bar y(t) = c_1\bar h_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\bar h_2 e^{\lambda_2 t}$.



$\lambda_1>0$
$\lambda_2<0$

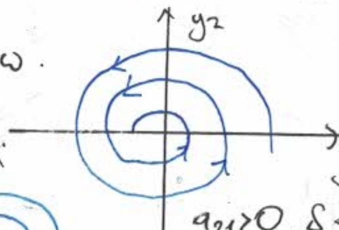
⑤ Фокус ($\lambda_{1,2} = \delta\pm i\omega\in\mathbb{C}$, $\omega\ne0$, $\delta\ne0$).

Пусть $\bar h = \bar h_1 + i\bar h_2$ (h_1,h_2 – ЛНЗ), $\bar z(t) = \bar h e^{\lambda_1 t}$, $\lambda_1=\delta+i\omega$.

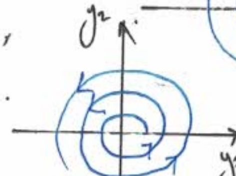
$\bar y_1(t) = \mathrm{Re}\,\bar z(t) = e^{\delta t}(\bar h_1\cos(\omega t) - \bar h_2\sin(\omega t))$,
$\bar y_2(t) = \mathrm{Im}\,\bar z(t) = e^{\delta t}(\bar h_1\sin(\omega t)+\bar h_2\cos(\omega t))$.

Общ. реш: $\bar y(t) = c_1\bar y_1(t)+c_2\bar y_2(t)$.

$\bar y(t) = \xi_1(t)\bar h_1 + \xi_2(t)\bar h_2$, $\xi_1(t) = Ce^{\delta t}\sin(\omega t+\varphi)$, $\xi_2(t)=Ce^{\delta t}\cos(\omega t+\varphi)$.



$a_{21}>0$, $\delta<0$ (У)



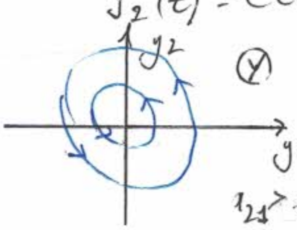
$a_{21}>0$, $\delta>0$ (НУ)

! при $a_{21}<0$ – отражение по вер...

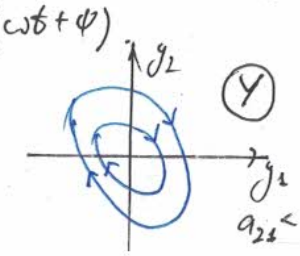
⑥ Центр ($\lambda_{1,2}=\pm i\omega\in\mathbb{C}$, $\omega\ne0$).

Общ. реш: $\bar y(t) = \xi_1(t)\bar h_1+\xi_2(t)\bar h_2$.

$\xi_1(t) = C\sin(\omega t+\varphi)$, $C=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\ne0$, $\sin\varphi=\frac{c_1}{C}$, $\cos\varphi\frac{c_2}{C}$.
$\xi_2(t) = C\cos(\omega t+\varphi)$



(У) $a_{21}>0$



(У) $a_{21}<0$

БИЛЕТ 32

Постановка краевой задачи для лин. ОДУ второго порядка, редукция к осн. краевой задаче.

Оп 53 (примерно: краевая задача – ЗК, но усл. на концах)

Краевая задача для ОДУ 2-го порядка:

$$\begin{cases} a_0(x)\,y''(x) + a_1(x)\,y'(x) + a_2(x)\,y(x) = f_1(x), \quad 0 \le x \le l & (3.7) \\ \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = u_0 & \\ \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = u_1 & (3.8) \end{cases}$$

$a_i(x), f_1(x) \in C^1[0,1]$, $a_0(x) \neq 0$, $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$.

Требуется найти ф-ию $y(x) \in C^2[0,l]$ удовл. (3.7), (3.8).

Разделим (3.7) почленно на $a_0(x)$, умножим на $p(x) = \exp\left\{\int_0^x \frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds\right\}$ выделяя полную произв., получим:

$$p(x)y'' + p(x)\frac{a_1(x)}{a_0(x)}y' + \underbrace{p(x)\frac{a_2(x)}{a_0(x)}}_{q(x)}y(x) = \underbrace{\frac{p(x)}{a_0(x)}f_1(x)}_{f_2(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3.9) \quad \frac{d}{dx}(p(x)\,y') - q(x)y(x) = f_2(x), \text{ где } p(x) \in C[0,l],\ p(x) > 0,$$
$$q(x), f_2(x) \in C[0,l].$$

Оп 54 Краевые усл-ия (3.8) наз. однородными, если $u_0 = u_1 = 0$, иначе неоднородн.

Редукция к однородным краевым усл-ям.

Покажем, что задачу (3.7), (3.8) можно свести к задаче с однород. краевыми усл-ми.

$\exists\ y(x)$ – реш. (3.9), (3.8). $\sphericalangle$ ф-ию $z(x) = y(x) - v(x)$, где v – специально подобр. ф-ия удовл. (3.8), не обяз. (3.9).

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dz}{dx}\right) - q(x)z = f(x), \quad x \in [0,l].$$

$$\alpha_1 z'(0) + \beta_1 z(0) = 0, \quad \alpha_2 z'(l) + \beta_2 z(l) = 0, \text{ где}$$

$$f(x) = f_2(x) - \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dv}{dx}\right) + q(x)v. \Rightarrow \text{краев. зад. можно}$$

свести к кр. з. с однород. усл.:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = f(x) & (3.10) \\ \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0 & \\ \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0 & (3.11) \end{cases}$$

Оп 55 Кр. задача (3.10), (3.11) наз. однородной, если $f(x) = 0$, иначе неоднородной.

БИЛЕТ 33

Тождество Лагранжа, формула Грина, формула для опр-ля Вронского.

Опр 56 Дифф-ый оператор $L[y] = \frac{d}{dx}\left(p(x)\cdot\frac{dy}{dx}\right) - q(x)\cdot y$.

$]\ z(x), y(x) \in C^2[0,\ell]$, Тогда можно вычислить $L[y]$, $L[z]$, а также:

$$z(x)L[y] - y(x)L[z] = z(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - y(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dz}{dx}\right).$$

Опр 57 Тождество Лагранжа: $z(x)L[y] - y(x)L[z] = \frac{d}{dx}\left(p(x)\left(z(x)\frac{dy}{dx} - y(x)\frac{dz}{dx}\right)\right)$.

$0 \le x \le \ell$. (3.12)

Следствие (ф-ла для опр. Вронского)

$]\ y_1(x), y_2(x)$ - ЛНЗ реш. однород. ур-ия $L[y]=0$, т.е. $L[y_1] = L[y_2] = 0$.

$$y_1L[y_2] - y_2L[y_1] = \frac{d}{dx}\left(p(x)\left(y_1(x)\frac{dy_2}{dx} - y_2(x)\frac{dy_1}{dx}\right)\right) = 0, \quad 0 \le x \le \ell.$$

т.к. $W[y_1,y_2](x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \Rightarrow p(x)W[y_1,y_2](x) = c$

$(c$ - const$) \Rightarrow$

$$W[y_1,y_2](x) = \frac{c}{p(x)}.$$

Опр 58 Интегр-уя (3.12) от 0 до ℓ:

$$\int_0^\ell \left(z(x)L[y] - y(x)L[z]\right)dx = p(x)\left(z(x)y'(x) - y(x)z'(x)\right)\Big|_0^\ell$$ - ф-ла Грина.

Следствие.

Покажем, что если $y(x)$ и $z(x)$ удовл-т одним и тем же краевым усл. ($\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0$, $\alpha_2 y'(\ell) + \beta_2 y(\ell) = 0$), то справедливо:

$$\int_0^\ell \left(z(x)L[y] - y(x)L[z]\right)dx = 0.$$

Из ф-лы Грина $\Rightarrow$ надо д-ть нер-во:

$$p(\ell)\left(z(\ell)y'(\ell) - y(\ell)z'(\ell)\right) - p(0)\left(z(0)y'(0) - y(0)z'(0)\right) = 0.$$

Пм, что $z(0)y'(0) - y(0)z'(0) = 0$.

1) Если $\alpha_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 \ne 0 \Rightarrow y(0) = 0, z(0) = 0 \Rightarrow z(0)y'(0) - y(0)z'(0) = 0$.

2) Если $\alpha_1 \ne 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0 & \cdot z(0) \\ \alpha_1 z'(0) + \beta_1 y(0) = 0 & \cdot y(0) \end{cases}$ $-$

$\alpha_1\left(y'(0)z(0) - z'(0)y(0)\right) = 0$. Аналогично $z(\ell)y'(\ell) - y(\ell)z'(\ell) = 0$